BRACHISTOCHRONE

EN KISA ZAMAN EĞRİSİ

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [*Bilkent Üniversitesi - Fen Fakültesi - Matematik Bölümü*

Bir kayak pistinin eğimi nasıl ayarlanmalı ki kayakçılar inişlerini en kısa sürede bitirsin? Kayak liftlerini işletenlerin aklına gelebilecek bu problem 1696'da matematik tarihinin en renkli ailesi Bernoullilerin ilk kuşağından olan Johann Bernoulli'nin aklına geldi. Döneminin önde gelen matematikçilerine meydan okumak için sorduğu soru şuydu: Dik bir düzlemde alt alta olmayan iki nokta arasına nasıl bir eğri çizilsin ki bu eğri boyunca sadece yerçekimi etkisiyle sürtünmesiz kayan bir cisim bu iki nokta arasındaki yolu en kısa sürede alsın?

Değil başkalarının başarılarını takdir etmek, oğlunu bile kendi kazanmak istediği bir matematik yarışmasına katıldığı için evden kovan Johann Bernoulli sorduğu soruya gönderilen isimsiz cevaplar arasından birine bakar, "aslan pençesinden belli olur" der ve kâğıdın üzerine "Isaac Newton" yazar.

Johann Bernoulli

Her Şey Bir Soruyla Başladı

Johann Bernoulli 29 yaşındayken *Acto Eruditorum* adlı dergide bir soru yayımladı. Genç Bernoulli dik bir düzlemde, iki nokta arasındaki mesafenin en kısa sürede alınmasını sağlayacak yolun şeklinin ne olması gerektiğini soruyordu. Burada, hareketin sadece yerçekimi altında ve sürtünmesiz bir ortamda gerçekleştirileceğini anlıyoruz. Örneğin bu iki noktayı bir telle birleştirir, tele de ortası delik bir boncuk geçirip yukarıdaki noktadan aşağıdaki noktaya kaç saniyede kaydığını ölçebiliriz. Daha sonra teli eğip büküp boncuğun kayacağı yolun şeklini değiştirir ve boncuğu tekrar yukarıdan bırakıp aşağıdaki noktaya kaç saniyede geldiğini ölçeriz. Yolun şekli değiştikçe ölçülen zamanın da değiştiğini gözleyince ilk akla gelen soru "tele nasıl bir şekil verirsek en kısa zaman ölçümünü alırız" olacaktır. İşte Bernoulli'nin sorduğu soru da buydu.

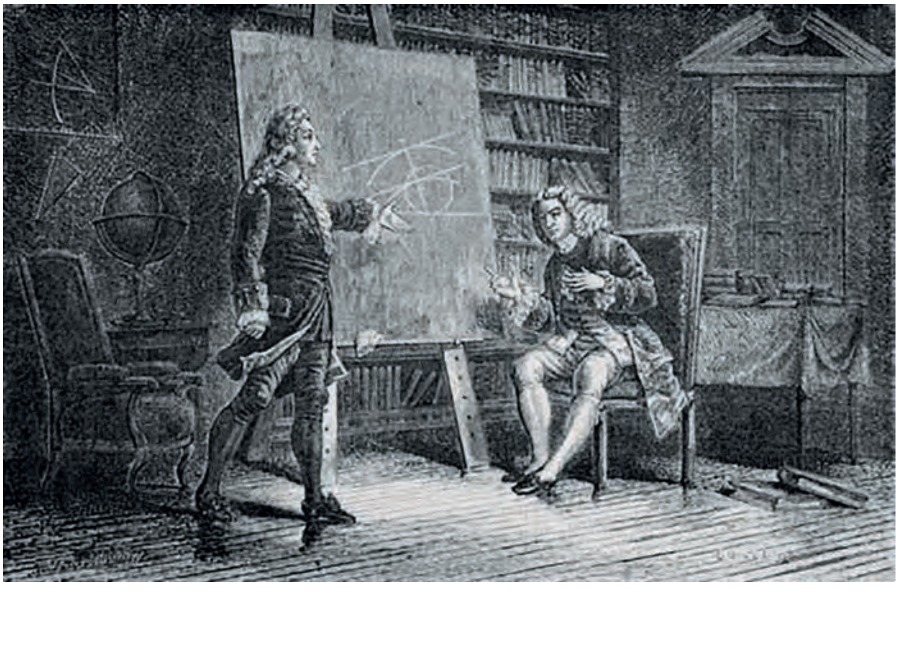
Bernoulli kendi ifadesine göre bu problemi iki haftalık bir çalışma sonunda çözmüştü. Çözüm için dâhiyane bir yöntem kullanmıştı. Her dâhiyane fikir gibi bu fikir de çok basittir ve duyanlara ben bunu niye daha önce akıl etmedim dedirtir. Dâhilik işte tam burada, o basit fikrin o karmaşık problemi çözebileceğini düşünmekte ve denemekte yatar.

Işığın bir ortamdan başka bir ortama geçerken hızı ve gidiş açısı değişir. Bu açılar ve hızlar arasında bir ilişki vardır ve bu ilişki Snell kurallarıyla modellenir. Işığın bir ortamdaki hızı biliniyorsa bir başka ortamdaki hızı giriş ve çıkış açıları ölçülerek bulunur. Bernoulli'nin fikri bu modeli tersten kullanmaktır. Boncuğun hareketini ortam değiştirdiği için hızı değişen bir ışık demetininkine benzetirsek ve boncuğun hızını da biliyorsak o an hangi açıyla yön değiştirdiğini hesaplayabiliriz. Aslında bir önceki cümle "belki" diye bitmeli. Mutlaka Bernoulli de bu cümleyi öyle bitirip o "belki" kelimesinin kendisinde oluşturduğu merakı gidermek için hesaplara girişmiştir. Cismin her noktada hangi açıyla yoluna devam ettiğini bulursa, takip ettiği eğriyi de görmeyi umut ediyordu.

Bernoulli bu yaklaşımla hem problemi çözmüş hem de en hızlı parkuru veren eğrinin çok "sevimli" bir eğri olduğunu görmüştü. İşte bu buluşun verdiği coşkuyu başkalarıyla paylaşmak ve aferin almak için 1696 yılının Haziran ayında meşhur sorusunu yayımladı.

Kimsenin sonucunu merak etmediği bir problemi çözmek yeterince tatmin edici değildir bilim dünyasında. Başkalarının uğraşıp da yapamadığı bir şeyi yapmanın zevki bambaşkadır. İşte Johann Bernoulli de önce problemiyle merak uyandırma yoluna gitmişti. Tıpkı Steve Jobs'un kimsenin akıllı telefona ihtiyacı yokken önce böyle bir ihtiyacımız olduğuna bizi ikna edip sonra milyonlarca telefon satması gibi.

Bernoulli kardeşler



Meraklılar

Grisham romanlarından öğrendiğimize göre bir avukat mahkemede cevabını bilmediği bir soruyu sormamalı. Bernoulli döneminde henüz Grisham romanları yoktuysa da bu problemi okuyanlar yine de “Bernoulli kendi çözmüş olmasaydı bu soruyu sormazdı” diye düşünmüştür. O zaman da “Johann yaptıysa ben haydi haydi yaparım” duygusuna yenik düşen pek çok matematikçi bu problemle ilgilenmiştir, ama çözenler sadece adlarını iki yüzyıl sonra hâlâ ders kitaplarında gördüğümüz kişiler olmuştur.

Çözümlerden biri Johann’ın ağabeyi Jacob Bernoulli’ye aitti. Kardeşinden daha akılı olduğunu göstermek için problemi çözmekle yetinmemiş bazı genellemeler de yapmıştı. Türev ve integral hesaplarını Newton’la aynı zamanda bulduğu kabul edilen filozof ve matematikçi Gottfried Leibniz de bir çözüm gönderdi.

Gottfried Leibniz

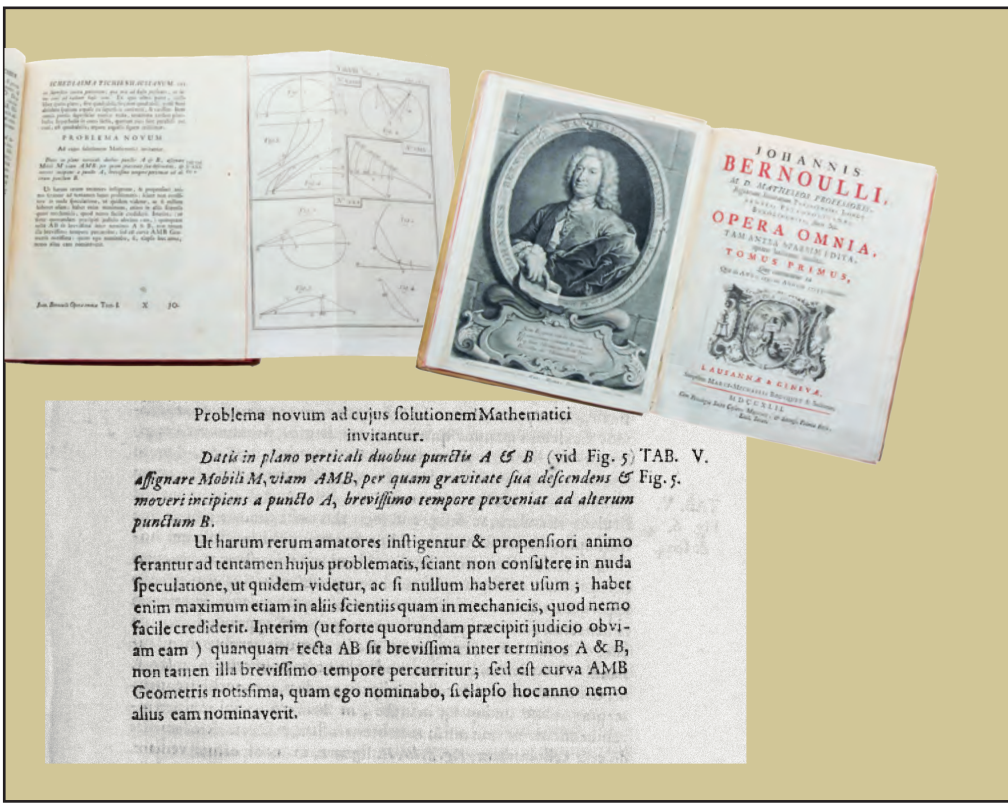
Bir başka çözüm de türevlenebilir fonksiyonlar üzerine ilk kitabı yazan Fransız matematikçi Guillaume de l’Hôpital’den geldi. L’Hôpital bu ilk analiz kitabını adını vermeden bastırmış ve içindeki sonuçları Leibniz ve Bernoulli’den öğrendiğini yazmıştı. Özellikle Johann Bernoulli’den öğrendiği ve belirsiz limit alma problemlerini çözen yöntem, her ne kadar Bernoulli’den öğrenilmiş olsa da, bugün l’Hôpital’in kuralı olarak adlandırılır.

Bugün cebirde Galois kuramı üzerinde çalışanların adını hemen tanıyacağı Ehrenfried Walter von Tschirnhaus da Bernoulli’nin problemine doğru bir çözüm göndermişti. Ama dönemin yıldızlarından Isaac Newton’dan henüz ses çıkmamıştı.

Johann Bernoulli, biraz da Newton’u bu problemle uğraşmaya tahrik etmek için, çözüm göndermeyen matematikçilerin bu problemi çözemediği söylentisini yaymaya başladı.

İngiliz kaynaklarından öğrendiğimize göre kendi matematikçileri Newton, problemi bir akşamüstü eve gitmek üzere okuldan ayrılırken posta kutusunda bulur. O gece oturur ve problemi hemen çözer. Bu anekdotu okurken bilim tarihçilerinin bunu “benim matematikçim senin matematikçini döver” sendromuyla uydurmuş olabileceği ihtimalini akılda tutmakta yarar var elbette. Ne kadar sürede çözmüş olursa olsun bu çözüm Bernoulli’nin takdirini kazanmaya yetmişti.

Johann Bernoulli’nin *Toplu Eserleri*’nde en kısa zaman eğrisiyle ilgili açıklamalar, çizim ve 1696 Haziran’ında en hızlı yol eğrisini sorduğu yazı (altta)



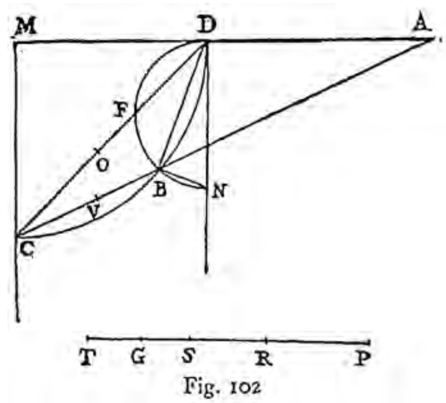
Galileo Olmadan Olmaz

Bir bilim insanının adının yüzyıllar ötesine taşınması sadece gayretkeş bilim tarihçilerinin abartılı anekdotlarıyla mümkün olmaz. O bilim insanlarının o abartılı anekdotları dahi inanılır kılan çalışmalar yapmış olması, kendilerinden sonra gelen bilim insanlarının çalışmalarını etkilemiş olması gerekir. Galileo böyle bir insandı. 1633'te engizisyon mahkemesi tarafından "Dünya Güneş'in etrafında dönüyor" dediği için ev hapsine mahkûm edilen ve bir daha kitap yazması yasaklanan Galileo evinde boş durmamış, beş yıl sonra en önemli eseri sayılan *İki Yeni Bilim* başlıklı kitabını yazmayı bitirip Hollanda'da kaçak olarak yayımlatmıştır.

Bu kitapta incelenen konulardan biri de dik bir düzlemde, birbirinin altında olmayan iki nokta arasında sadece yerçekimi etkisiyle kayan bir cismin bu mesafeyi en kısa sürede alması için nasıl bir yol izlemesi gerektiği problemidir. Avrupa'da o zaman çok ses getiren bu kitaptaki problemi Johann Bernoulli'nin okumamış olması mümkün mü? Ama Bernoulli kendisine bu kitaptaki problem gösterildiğinde daha önce hiç görmediğini söylemiştir. Yine tipik bir "küçük sanatçılar başkalarının fikrini ödünç alır, büyük sanatçılar çalar" durumu.

Bernoulli'nin şansı Galileo'nun bu problemi kendisinden önce sormuş olmasına rağmen yanlış çözmüş olmasıdır. Evet, Galileo bile hata yapabilir. Bilimde, yapılan hatalar değil doğrular kayda geçer.

Galileo Galilei ve en kısa zaman eğrisi üzerine çalışması (altta)



Aranan Eğri Hangisi

Galileo bu problemi incelerken önce bir çeyrek çember yayı alır. Bu yayın içinde birbiri ardına gelen kirişler alır ve cismin bu kirişler boyunca eğik düzlem kurallarına göre kayıp aşağıdaki noktaya ne kadar zamanda gideceğini hesaplar. Kiriş sayısı arttıkça, yani takip edilen yol çember yayına yaklaştıkça sürenin kısaldığını görür. Buraya kadar yapılan hesaplar doğrudur. Ancak Galileo bu hesaplar sonunda en hızlı parkurun çember yayı olması gerektiği sonucuna varır ki bu biraz aceleyle yapılmış bir gözlemdir.

Bernoulli yaptığı hesaplar sonunda en hızlı parkurun sikloid eğrisiyle verileceğini bulmuştur. Üstelik yıllar önce bu eğriyi en kapsamlı inceleyen ve ona sikloid adını veren matematikçi Galileo'dur.

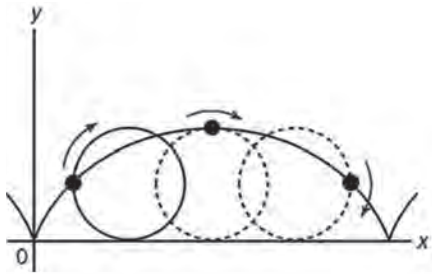
Fakat Galileo'nun yanlış cevabı o kadar da "kötü" değildir. Galileo'nun incelediği gibi bir çeyrek çember yayıyla aynı iki nokta arasındaki sikloid eğrileri süre bakımından yarıştırılırsa Galileo'nun parkuru sadece yüzde bir buçuk daha yavaş kalır. Yani bir cisim sikloid boyunca yüz saniyede kayarsa çeyrek çember üzerinde yüz bir buçuk saniyede kayar. Aynı iki noktayı birleştiren eğik düzlem üzerinde ise bu süre yüz dokuz buçuk saniye olacaktır.

En kısa süre şampiyonu olan sikloid eğrisiyle tanışma zamanımız geldi.

Galileo'nun en kısa zaman eğrisini bulmak için deneyler yaptığı düzenek

Sikloid Eğrisi

Bir doğru boyunca dönerek ilerleyen bir çemberin üzerindeki sabit bir noktanın takip ettiği yola sikloid eğrisi denir. Bu eğriyi incelemeye değer bulan ilk matematikçiler bu eğrinin daha büyük bir çemberin yayı olduğunu düşünmüştür. Gerçekten de bir sikloid yayına bakarsanız bunun bir çember yayı olmayabileceğinden şüphelenmezsiniz. Ancak bu eğrinin denklemlerini çıkarmaya çalışınca bunun bir çember yayı olmadığını görürsünüz. Bu eğri üzerine kapsamlı ilk çalışmayı Galileo ile öğrencisi Torricelli yapmıştır ve bugünkü ismini veren de Galileo'dur.



Bir sikloid eğrisinin çizimi

Sikloid ve Pascal

Sikloid üzerine kalıcı çalışmalar yapan bir diğer kişi Blaise Pascal'dır. Pascal matematikçi olarak başladığı hayatına ilahiyatçı olarak devam etmiş ve bu alanda hâlâ övgüyle söz edilen çalışmalar yapmıştır. Bir gece diş ağrısından uyuyamayınca sikloid eğrisiyle uğraşırsa ağrısını unutacağını düşünüp masasının başına geçmiş. Bir süre sonra gerçekten dişinin ağrısı kesilince bunun tanrısal bir işaret olduğunu düşünüp o sıralar matematiği bırakmış olmasına rağmen sikloid eğrisi üzerine yoğun bir çalışmaya girişmiştir. Sekiz günlük çalışma sonunda sikloid eğrisinin pek çok özelliğini bulmuş ve bu konuda ödüllü bir de yarışma açmıştır. Pascal "rulet" adını verdiği sikloid ile ilgili buluşlarını *Cavaliere'e Mektuplar* adı altında ve Amos Dettonville takma adıyla yayımlatmıştır. Bu takma ad önemli bazı yazılarında kullandığı Louis de Montalte'deki harfler kullanılarak, ama "u" yerine "v" alınarak oluşturulmuştur.

Pascal'ı sikloid eğrisi üzerine düşünürken temsil eden heykel

Augustin Pajou, Louvre Müzesi

Neden Sikloid

Sikloid eğrisinin matematikçilerin ilgisini bu denli çekmesinin ve birbirlerine meydan okuyan sorular sormalarına yol açmasının nedeni, tarifi ve hele denklemleri karışık olmasına rağmen özelliklerinin ifadesinin çok "şık" olmasıdır. Örneğin bir çemberin tam dönüşüyle elde edilen sikloid eğrisinin uzunluğu onu çizen çemberin çapının dört katı, altında kalan alan ise onu çizen çemberin alanının üç katıdır. Bu sikloid eğrisini x-ekseni etrafında döndürerek elde edilen cismin hacmi ve yüzey alanı da yine o sikloid eğrisini çizen çemberin yarıçapı cinsinden basitçe ifade edilebilir. Matematikle uğraşmaya başladıktan bir süre sonra matematik dünyasına özgü bir "güzellik" kavramı geliştirmeye başlarsınız. İşte sikloid bu kavrama göre çok "güzel" bir eğridir.

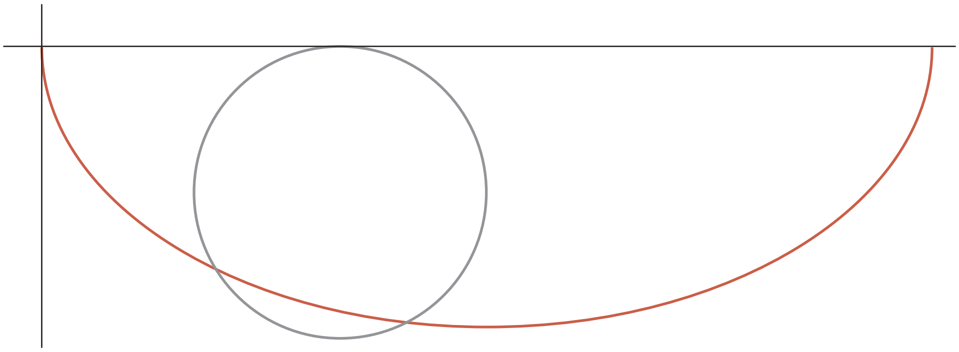
Sikloid Eğrisiyle Zamanı Ölçüyoruz

Bir çanağın içine bir bilye bırakırsak, çanağın içinde aşağı yukarı yuvarlandıkça bilyenin eriştiği yüksekliğin azaldığını ve her salınımının süresinin farklı olduğunu gözleriz. Çanağın şekli ne olmalı ki bilye yavaşlasa bile her salınımının süresi aynı olsun? Bunu bulursak zamanı ölçmek için yeni bir alet keşfetmiş olacağız. Bu probleme tautochrone, yani eş zaman problemi denir. Bu problemi 1659'da Christiaan Huygens çözmüş ve çözümün bir sikloid eğrisi olacağını göstermiştir. Huygens bu fikri sarkaçlı saatlere de uygulamak istemiştir.

Madem bir sikloid eğrisi boyunca yuvarlanan bir bilyenin karşı tarafa gidip gelme süresi hep aynı kalıyor, o zaman eğer bir sarkaç kolunun da havada bir sikloid eğrisi çizmesini sağlarsak yavaşlasa bile onun da zamanı doğru ölçmesini sağlayabilir miyiz? Bunun için sarkacın ipinin iki kenarına özel bir şekil verilmiş iki "yanak" koymak gerekir. İp bu yanaklara dokunup sarıldıkça sarkacın izlediği yol değişecektir. Bu yolun bir sikloid olması için yukarıdaki yanakların şeklinin nasıl olması gerektiğini hesaplayan Huygens bu şeklin de yine bir sikloid olması gerektiğini bulmuştur.

Bu hesaplar yapılırken sürtünmenin sonucu etkileyeceği ama etkisinin çok az olacağı varsayılır. Uygulamada bu varsayımın doğru olmadığı, Huygens'in sikloid eğrisi kullanarak yaptığı sarkaçlı saatte ipin yanaklara sürtünmesinin ihmal edilemeyecek sonuçları olduğu görüldü. Ama yine de eğer teknoloji bir gün bu sürtünmeyi azaltacak bir yol bulursa ideal bir sarkacın planları şimdiden hazır.

Christiaan Huygens
sarkaçlı saati tanıtıyor (altta)



En kısa zaman eğrisini bulmak için sikloid eğrisini x-eksenine alttan değen bir çember yardımıyla çizeriz.

Kimbell Sanat Müzesi
Mimar Kahn kendi yaptığı ve kemerleri sikloid şeklinde olan Kimbell Sanat Müzesi'nde (altta)

Sanatta Sikloid

Herman Melville'in "Ishmael deyin bana" diye başlayan o muazzam romanı *Moby Dick*'in doksan altıncı bölümünde Ishmael bize balina gemilerindeki yağ eritme kazanlarını anlatır. Gemicilerin kazanların içine girip ellerindeki sabun taşlarıyla kazanı ovduklarını söyler. Bundan sonrasını Sabahattin Eyüboğlu ve Mina Urgan tercümesinden okuyalım.

Derin matematik düşüncelere de elverişli bir yerdir burası. Netekim ben, Pequod'un sağ kazanı içinde, elimde sabun taşı, fırıl fırıl dönerken, şu önemli gerçeğin farkına vardım: Geometride, bir sikloyit boyunca kayan bütün cisimler - örneğin benim şu sabun taşım - her noktadan aşağı, tıpatıp aynı süre içinde inerler.

Mimaride sikloid eğrisini kemer olarak kullanan en tanınmış mimar Louis Kahn'dır. Yirminci yüzyılın en usta mimarları arasında gösterilen Kahn'ın eserleri, yerine göre malzemesinin ağırlığını hissettiren abidelere zaman zaman da çevreye yayılmış el işi bir dantele benzer. Kimbell Sanat Müzesi'nin kemerlerini bir sikloid şeklinde tasarlamış ve ortasına da ışığın geçeceği bir oluk açmıştır. Bir iş gezisi dönüşü bir tren istasyonunun tuvaletinde ölü bulununcaya kadar çok renkli bir hayatı olmuştu. Oğlu Nathaniel Kahn 2003'te babası ve eserleri hakkında *Benim Mimarım: Bir Oğulun Yolculuğu (My Architect: A Son's Journey)* adlı bir belgesel çekmiştir. O yıl en iyi belgesel film dalında Oscar ödülüne de aday olan film Kahn'ın yarattığı geometrik mekânları hayranlıkla izlemek için bir fırsattır.

Benim Mimarım: Bir Oğulun Yolculuğu

Gateway Kemeri (sağda altta) ve mimarı Eero Saarinen iş başında

Matematik eğitimini kendi verdiği kardeşinden geri kalmaya tahammülü olmayan Jacob Bernoulli bu zincir eğrisinin denklemini bulma problemini meslektaşlarına bir meydan okuma olarak sordu. Bu soruya Leibniz, Huygens ve kardeşi Johann Bernoulli doğru cevap gönderdi. Bu eğrinin denklemi genel olarak bir hiperbolik kosinüs fonksiyonuyla verilir.

Trigonometrik sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bir çember yardımıyla tanımlanmasına karşılık hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları bir hiperbol kolu kullanılarak tanımlanır. İsim benzerliği hem sağladıkları denklemlerin benzerliğinden hem de Taylor açılımlarındaki benzerliktendir. Örneğin sinüs fonksiyonunun Taylor açılımındaki tüm işaretleri artı yaparsanız hiperbolik sinüs fonksiyonunun açılımı bulunur.

Eğrilerin kraliçesi olarak anılan mimar Zaha Hadid'in tasarladığı Haydar Aliyev Kültür Merkezi

Mimaride kemer yapımında zincir eğrisi epey kullanılmıştır. En meşhur örnek Missouri eyaletindeki St. Louis Gateway Kemeri'dir. Aslında bu kemerin üst kısımlarının diğer kısımlarına göre daha ince olması nedeniyle, denklemin içindeki parametrelerin ideal bir hiperbolik kosinüs eğrisi çıkmasına engel olduğunu ileri sürenler olsa da 1965'te yapımı biten, 192 metre yüksekliğindeki bu yapının mimarı plan aşamasında açıkça hiperbolik eğrileri kullanmıştır.

Zincir Eğrisi

Sikloid eğrisinin Avrupalı matematikçileri meşgul ettiği yıllarda bir başka eğri de gündeme geldi. İki nokta arasına asılmış bir zincirin oluşturduğu eğrinin ne olduğunu araştırmak için yeterli teknikler artık vardı. Üstelik ortam böyle bir çalışma yapacak kişinin takdir edilmesi için de uygundu.

Galileo Jüpiter'in uydularından eğik düzlemde kayan cisimlere kadar geniş bir yelpazeye yayılan araştırmaları sırasında hepimize teselli veren hatalar da yapmıştır. Bunlardan biri de zincir eğrisinin parabol şeklinde olacağı yönündeki tahminidir. Ama Galileo usta burada da fazla yanılmamıştır. Bir asma köprünün taşıyıcı halatlarının da bir zincir eğrisi şeklinde olduğu konusundaki genel kanıya rağmen bu taşıyıcı halatlar, kendi ağırlıklarının yanı sıra köprü tabyasını da taşıdıkları için parabol şeklindedir.

Değişkenler Hesabı

Johann Bernoulli'nin sorusuyla matematikte yeni bir araştırma alanı açıldı. Özellikle ağabeyi Jacob Bernoulli en kısa zaman eğrisi için verdiği çözümde ilk defa "integral" kelimesini kullanmış, genel olarak beklenen bir sonucu veren fonksiyonlar arasında en uygun olanı bulma problemine değinmiştir. Daha sonra Johann Bernoulli'nin öğrencisi olan Euler ve o dönemin ustalarından Lagrange bu probleme çok önemli katkılar yapmıştır. Bugün bu çeşit problemlerin çalışıldığı alana değişkenler hesabı adı verilir. Hilbert'in tüm yirminci yüzyıl matematiğini yönlendiren meşhur yirmi üç problemlik listesindeki yirminci ve yirmi üçüncü problemler bu konuyla ilgilidir.

Günlük Hayat

Sikloid eğrisi, zincir eğrisi ve burada sözünü etmediğimiz pek çok eğri bugün gerek mimaride yapılara biçim ve güç katmakta gerekse otomotiv endüstrisinde en az sürtünmeyle çalışan dişlilerin yapımında kullanılmakta. Otomobillerin kaportalarının hava direncini azaltmak, gemilerin ve denizaltıların suda en az sürtünmeyle ilerlemesini sağlamak için de çeşitli eğriler kullanılır. Ama gördüğünüz gibi bu eğriler on altıncı yüzyılda, Henry Ford'un meşhur model T otomobilini çıkarmasından yüzlerce yıl önce bulunmuştu.

Lunaparklarda inişli çıkışlı parkurlarıyla binenlerin yüreğini ağzına getiren hız trenlerinin en çok heyecan uyandıran iniş raylarında da sikloid eğrisi kullanılır. Sadece yerçekimiyle düşmeye bırakılan trene en yüksek hızı kazandırmak için matematik kullanılmasından daha doğal ne olabilir ki.

Yaptığı her temel bilim çalışması sonunda heyecanla buluşlarını başkalarıyla paylaşmaya çalışan bilim insanı kaçınılmaz olarak "peki bu ne işe yarayacak" sorusuna takılır. Bulundukları anda coşku yaratan, onları bulanların bir anlığına da olsa hayatın anlamına dokundukları hissine kapılmasına yol açan bu muhteşem buluşların, sıradan günlük hayatları etkilemiyorlarsa sanki hiç değerleri yoktur. Oysa bugün günlük hayatı teknoloji sayesinde doğrudan etkileyen temel bilim konusundaki pek çok buluş, zamanında sadece meraklı birkaç araştırmacının birbirini etkilemek ve kendi çocukça meraklarını gidermek için yaptığı çalışmalar sonunda ortaya çıkmıştır. Hiçbir uygulaması olması beklenmeyen ve sadece bilimsel bir haz duymak için yapılmış nice buluş bugün günlük hayatımızı açıkça biçimlendirmektedir, ama bu başka bir yazının konusu. ■

Kaynaklar

Wikipedia

Boccara, N., *Essentials of Mathematica*, Springer-Verlag, 2007.

Lind, D., Sanders, S. P., *The Physics of Skiing*, (2. baskı) Springer-Verlag, 2004.

Melville, H., *Moby Dick Beyaz Balina*, Çev: S. Eyüboğlu ve M. Urgan, Cem Yayınevi, 1972.

Nahin, P. J., *When Least is Best*, Princeton University Press, 2007.

Whitman, E. A., Some historical notes on the cycloid, *The American Mathematical Monthly*, Cilt 50, Sayı 5, s. 309-315, 1943.