Proceedings of the American Mathematical Society,
133 (2005) 43-50,
Elektronik baskı : Ağustos 2004.

Türkçe Özet

HANGİ TEKİL K3 YÜZEYLERİ BİR ENRİQUES YÜZEYİNİ ÖRTERLER

ALİ SİNAN SERTÖZ

Özet. Bu çalışmada bir tekil K3 yüzeyinin aşkın örgüsü üzerinde, bu K3 yüzeyinin bir Enriques yüzeyinin iki kat örteni olması için gerek ve yeter şartları tespit ediyoruz.

1. Giriş

Terim olarak "tekil K3 yüzeyi" denilince Picard sayısı 20 olan *düzgün* K3 yüzeyleri anlaşılır. Buradaki "tekil" sözü, bu çeşit yüzeylerin sınıflandırma uzayında "istisnai" bir yer tutmaları nedeniyle kullanılır. Eğriler teorisinde eliptik eğriler ne yer tutuyorsa, K3 yüzeyleri de yüzeyler teorisinde o denli önemli bir yer tutarlar. Bunun nedeni, eliptik eğriler gibi, bir yandan geometrinin nesneleri olmalarına rağmen öte yandan, bu çalışmada da göreceğimiz gibi, sayılar teorisiyle olan şaşırtıcı ilişkileridir.

Picard sayısı 20 olan, yani tekil bir K3 yüzeyini X ile gösterelim. X'in aşkın örgüsündeki bir $\{u, v\}$ bazına göre kesişme matrisi

$$\begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{pmatrix} \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b c tam sayılardır ve $a, b > 0$ ile $4ab - c^2 > 0$ şartlarını sağlarlar. K3 yüzeyleriyle ilgili genel tanım ve sonuçlar için [1] kaynağı kullanılabilir.

2000 *Matematik Konu Sınıflandırması:*. 14J28, 11E39.

Kısmen TÜBİTAK-BDP tarafından desteklenmiştir.

Enriques yüzeylerinin sınıflandırılması üzerine Horikawa'nın çalışmalarını, bkz [5, 6], ve çift örgülerin sınıflandırılması üzerine Nikulin'in çalışmalarını, bkz [11, 8], kullanan Keum genel olarak bir K3 yüzeyinin ne zaman bir Enriques yüzeyini örteceği problemini incelemiştir, bkz [7].

Bu çalışmasında Keum bir K3 yüzeyinin bir Enriques yüzeyini örtmesi için gerek ve yeter şartın, aşkın örgüsünün K3 örgüsü içine belli şartları sağlayan bir fonksiyonla yatırılabilmesi olduğunu gösterir. Bu sonuç geometrik bir *olabilme* probleminin cebirsel bir *olabilme* problemine indirgenmesini gösterir ama yapıcı bir sonuç değildir.

Bu makalede, genel bir K3 yüzeyi yerine bir tekil K3 yüzeyi alındığı zaman bir *olabilme* teoremi yerine kesin ve kolaylıkla uygulanabilir bir gerek ve yeter şart sonucu bulunduğunu gösteriyoruz.

Cebirsel geometrinin asıl gücü geometri problemlerini cebir problemlerine tercüme edip cebirsel çözümler bulması ve bunları geometriye geri tercüme etmesinde yatar. Bu yüzden önce, K3 yüzeylerinin incelenmesinde kullanılan, bazı cebirsel yapıları tanımlayacağız.

Sırasıyla U ve E_8 hiperbolik ve E8 kök örgülerini göstersin. K3 örgüsü Λ'nın

$$\Lambda^- = U \oplus U(2) \oplus E_8(2)$$

şeklinde tanımlanan bir alt örgüsünü düşünelim. X yüzeyinin Picard sayısını da $\rho(X)$ ile gösterelim. Picard sayısı $10 \leq \rho(X) \leq 20$ şartlarını sağlayan bir K3 yüzeyinin bir Enriques yüzeyini örtmesi için gerek ve yeter şartlar şunlardır:
(i) Öyle bir bölünmez $\phi : T_X \to \Lambda^-$ gömmesi vardır ki Λ^- içindeki dik tamlayan uzayında kendi kendisiyle kesişimi -2 olan hiçbir vektör yoktur, ve
(ii) eğer $\rho(X) = 10$ veya 11 ise, ayrıca $length\,(T_X) \leq \rho(X) - 2$ olmalıdır, bkz [7, Theorem 1].

Uygulamada eğer X yüzeyi gerçekten bir Enriques yüzeyini örtüyorsa, verilen şartları sağlayan bir ϕ gömmesi bulmak çoğu zaman zor olmakla beraber mümkün olabilmektedir. Asıl zorluk X yüzeyi bir Enriques yüzeyini örtmediği zaman, verilen şartları sağlayan bir ϕ olmadığını göstermekte yatmaktadır.

Öte yandan incelemeyi tekil K3 yüzeylerine yöneltince çok kesin kriterler bulmak mümkün olmaktadır. Bu çalışmadaki ana teoremimiz şu şekilde ifade edilebilir:

Theorem 1. *Aşkın örgüsü denklem (1)'deki gibi verilen bir tekil K3 yüzeyi X'in bir Enriques yüzeyini örtmesi için gerek ve yeter şartlar şunlardır:*
I *a, b ve c tamsayıları çifttir. (Keum'un sonucu, bkz* [7]*).*
II *c tek ama ab çifttir.*
III-1 *c çifttir. a veya b tektir. $ax^2+cxy+by^2$ bilineer formu 1 sayısını temsil etmez.*
III-2 *c çifttir. a veya b tektir. $ax^2+cxy+by^2$ bilineer formu 1 sayısını temsil eder ama $4ab-c^2 \neq 4, 8, 16$.*

Bu ifadeye özdeş olarak, X'in bir Enriques yüzeyini örtmemesi için gerek ve yeter şartlar şöyle sıralanabilir:
III-3 *c çifttir. a veya b tektir. $ax^2+cxy+by^2$ bilineer formu 1 sayısını temsil eder ve $4ab-c^2 = 4, 8, 16$ olur.*
IV *abc tektir.*

Bir bilineer formun bir sayıyı temsil edip etmediği, sayılar teorisinde Gauss'tan beri çok iyi bilinen algoritmalarla kolayca tayin edilebildiği için, bu teoremi uygulamak çok kolaydır, bkz [12].

2. Aşkın örgüde teklİk-Çİftlİk

X'in aşkın örgüsünde başka bir baz alırsak kesişme matrisindeki tam sayıların değişeceği aşikardır. Bu bölümde, bu sayıların tekliği ve çiftliği konusunda kullandığımız ifadelerin anlamlı olmaya devam ettiğini gösteriyoruz. Kısacası, teoremde kullanılan kriterler bir baz seçimine bağlı değildir.

3. Tam sayisal ÖrgÜler İçİn İkİ sonuç

Tam sayısal örgülerin ana özellikleri için [1, 3, 4, 9] kaynakları kullanılabilir.

Bu bölümde tam sayı örgüleri için, literatürde olmayan ama ilerde kullanacağımız iki sonuç veriyoruz.

Birinci sonuç bir alt uzayla dik tamlayanının sağlaması gereken bir sayısal şartı tanımlamaktadır. İkinci sonuç da genel olarak bir baz seçildiğinde, giriş bölümünde sözü edilen, ϕ gömmesinin var olması için sayısal bir gerek ve yeter şart belirtmektedir.

4. c'NIN ÇİFT, a VEYA b'NİN TEK OLMA DURUMU

Bu bölüm makalenin ana kısmını teşkil etmektedir.

4.1. $ax^2 + cxy + by^2$ formunun 1 sayısını temsil etmediği durumda, bir önceki bölümde verilen sonuç yardımıyla bir ϕ gömmesi kurulmakta ve teoremin öngördüğü sonuç elde edilmektedir. Bu durumda **III-1** ispatlanmış olur.

4.2. $ax^2 + cxy + by^2$ formunun 1 sayısını temsil ettiği durumda, yine bir önceki bölümde verilen sonuç yardımıyla problem başka bir Diophant problemine indirgenmektedir. Biraz daha çalışınca bu problem hiperbolik uzaylarda Vinberg'in yaptığı çalışmalarla ilişkilendirilebilmektedir, bkz [15]. Vinberg'in hiperbolik uzaylardaki özeşyapı dönüşümlerinin ana tanım alanları ve bu alanların sınır duvarları üzerine yaptığı çalışmalarını yorumlayarak, problemi tamamen bazı vektörlerin varoluş problemine indirgeyebiliriz. Bu durumda, söz konusu olan vektörleri kurmaktan başka yapacak iş kalmamıştır, ve bu vektörleri inşaa ederek teoremin **III-2** ve **III-3** şıklarını ispatlarız.

5. DİĞER DURUMLAR

Bu bölümde, X'in aşkın örgüsü için bir $\{u, v\}$ bazı seçerek, giriş bölümünde sözü edilen ϕ gömmesinin var olduğunu, ya da teoremin **IV** durumu için var olmadığını gösteriyoruz. Böylece teoremin ispatlanması tamamlanıyor.

Teşekkürler: Meslektaşlarım A. Degtyarev, A. Kerimov, A. Klyachko ve E. Yalçın'a muhtelif yorumları ve yardımları için teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

[1] Barth, W., Peters, C. and Van de Ven, A., Compact Complex Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1984.

[2] Benedetti, R. and Petronio, C., Lectures on Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag, Universitext, 1992.
[3] Birkhof, G. and Mac Lane, S., A Survey of Modern Algebra, MacMillan, 1941.
[4] Degtyarev, A., Itenberg, I. and Kharlamov, V., Real Enriques Surfaces, Lecture Notes in Mathematics Vol: 1746, Springer-Verlag, 2000.
[5] Horikawa, E., On the periods of Enriques surfaces-I, Math. Ann. 234 (1978), 73-88.
[6] Horikawa, E., On the periods of Enriques surfaces-II, Math. Ann. 235 (1978), 217-246.
[7] Keum, J. H., Every algebraic Kummer surface is the K3-cover of an Enriques surface, Nagoya Math. J., 118 (1990), 99-110.
[8] Morrison, D. R., On K3 surfaces with large Picard number, Invent. Math., 75 (1984), 105-121.
[9] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric Bilinear Forms, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1973.
[10] Nikulin, V., On Kummer surfaces, Math. USSR Isvestija, 9 (1975), 261-275.
[11] Nikulin, V., Integral quadratic bilinear forms and some of their applications, Math. USSR Isvestija, 14 (1980), 103-167.
[12] Niven, I., Zuckerman, H.S. and Montgomery, H.L., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley and Sons, 1991.
[13] Pjateckiĭ-Šapiro, I. I.; Šafarevič, I. R. Torelli's theorem for algebraic surfaces of type K3. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 35, (1971), 530–572.
[14] Shioda, T.; Inose, H. On singular $K3$ surfaces. Complex analysis and algebraic geometry, pp. 119–136. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.
[15] Vinberg, E. B., On groups of unit elements of certain quadratic forms, Math. USSR Sbornik, 16 (1972), 17-35.

Bİlkent Ünİversİtesİ, Matematİk Bölümü, 06800 Ankara

E-posta Adresi: sertoz@bilkent.edu.tr