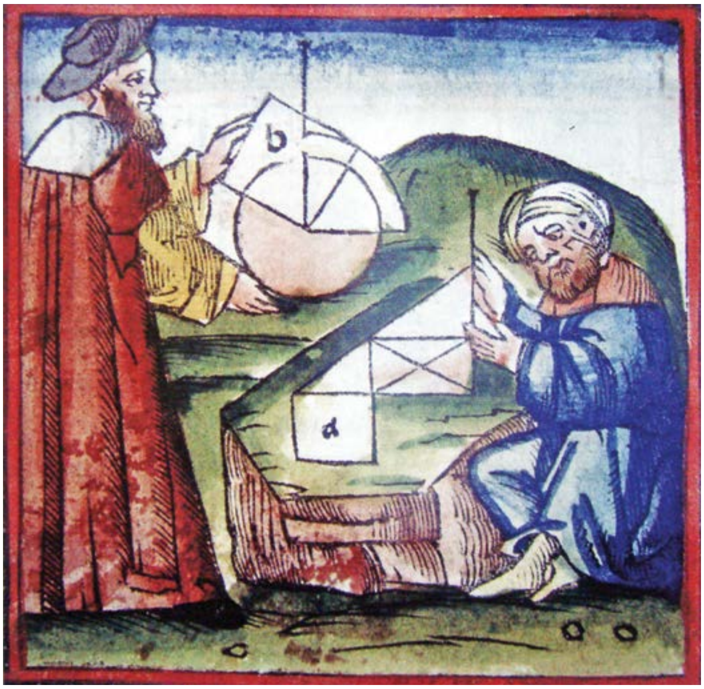
Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz

Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

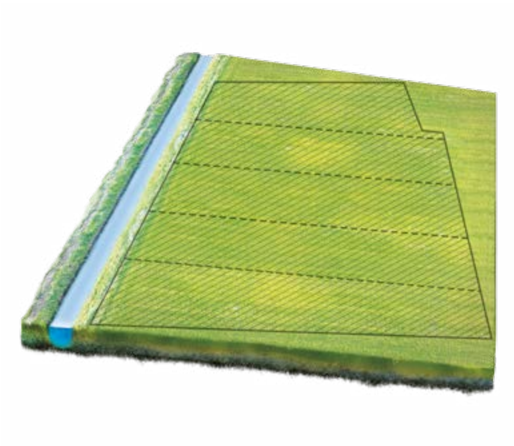


CEBİR TARLADA BAŞLADI

Beş adam, itiş kakış mahkeme salonuna girer. Hepsi birbirinden şikâyetçidir. Ortak aldıkları bir meyve bahçesini beş eşit parçaya bölememişlerdir. Her biri diğerlerinin kendisini aldatmaya çalıştığını iddia eder.

Paylaşılmaya çalışılan bahçenin bir kenarında su kanalı vardır. Her ortak kendi payına düşen bahçenin suya erişimi olmasını ister. Birbirine paralel ama su kanalına dik dört çizgiyle bahçeyi beşe bölmek isterler, ama her denemede mutlaka bir ortak kendisine daha küçük bir bahçe düştüğünü iddia edip su koyverdiği için mahkemelik olmuşlardır.

Sonunda dava saray matematikçisine kadar gider. Saray matematikçisi de “kolay bu iş” der. Bilgisayara bahçenin şeklini çizecektir. En alt kısımdan başlayarak ilk çizgiyi rastgele çekecek ve altındaki alan bahçenin alanının beşte biri oluncaya kadar çizgiyi fareyle oynatacaktır. İstediği alanı ekranda görünce de çizgiyi sabitleyecektir. Bunu her parça için yapınca tarlayı hangi çizgilerden beşe böleceği kendiliğinden ortaya çıkacaktır.



Friberg'in makalesinden alınan bilgiler doğrultusunda çizdiğimiz bu şekilde, paylaşılmak istenen tarlayı ve mahkemeden istenen sınır çizgilerini görüyoruz. Taralı alan paylaşılmak istenen tarla. İki paralel çizginin arasında kalan alanın, tarlanın toplam alanının beşte biri olması isteniyor.

Ama küçük bir sorun vardır. MÖ 2100 yılında henüz böyle bir program yazılmamıştır ve zaten yazılsa da bunu çalıştıracak işletim sistemi henüz yoktur. Zaten bilgisayar da henüz icat edilmemiştir. Elektrik ise kavram olarak dahi yoktur.

Peki ama şimdi bu yamuk tarlayı nasıl beşe bölecek bu adam?

Elbette doğrudan matematik kullanarak.

Zaten binlerce yıl sonra bilgisayar icat edilip bu işler bilen bilmeyen herkes tarafından bilgisayarla yapılmaya başlanınca da, arka planda çalışan yazılımın kendisi de doğrudan matematik kullanacaktır.

Nasıl bugün termodinamik yasalarını bilmeye gerek duymadan otomobil, matematik bilmeye hiç gerek duymadan bilgisayar yazılımları kullanıyorsak, MÖ 2100 yılında da hiç matematik bilmeye gerek kalmadan saray matematikçisinin sihirli bilgileri kullanılıyordu.

Şimdi kendinizi o saray matematikçisinin yerine koyup bu problemi nasıl çözeceğinizi düşünün. Yapamazsanız kralın sizi atıp yerinize başka bir matematikçi alacağını da aklınızın kenarında motivasyon ögesi olarak tutun. Ekmek o zaman da aslanın ağzındaydı.

Saray matematikçisi sabaha karşı çözümü bulup raporunu yazar ve ailesine bir süre daha yemek ve yatacak yer sağlayabilmenin huzuruyla uykuya dalar.

Ertesi gün mahkeme bu çözüme bağlı olarak davayı sonuçlandırır. Mahkeme kararı, her zaman olduğu gibi, sıradan bir tablete yazılır. Bu tabletteki bilgiler doğrultusunda bahçe pay edilir.

Bugün bu tablet elimizde. Üstelik çok da önemli bir konumu var bizim için. Bu tabletteki mahkeme kararı ikinci derece polinom çözümlerinden söz eden en eski tablet. Bu bilgileri bilim tarihi araştırmacısı Jöran Friberg'in 2009 yılında yayımladığı bir bilimsel makaleden öğreniyoruz.

Bu tablette problemi çözmek için önce ikinci derece bir polinomun köklerine gerek duyulduğuna işaret edilir. Sonra bu köklerin ne olduğu ve uygulamalı çözümde nasıl kullanılacağı anlatılır.

Dikkat ederseniz köklerin nasıl bulunacağından söz edilmez. Belki nasıl olsa okuyan anlamaz diye çözüm yöntemi anlatılmamıştır. Ama saray matematikçisinin işini kaybetmemek için meslek sırlarına kıskanç bir titizlikle sahip çıkmış olma ihtimalini de göz ardı etmemek gerekir. Mimar Sinan'ın onca esere rağmen tek açıklama bırakmamış olması da aynı nedene bağlanabilir mi?

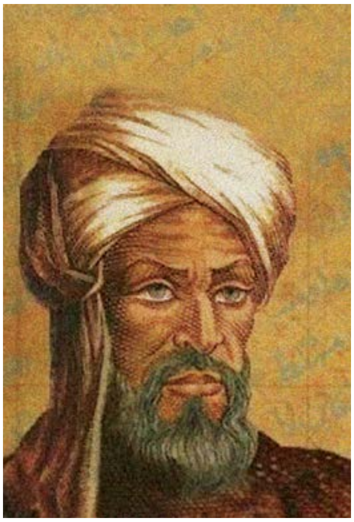
İkinci derece polinomların çözüm yöntemlerinden söz eden tabletlerin yazılması için birkaç yüzyıl beklemek gerekecektir. YBC 6967 arşiv kodlu tablet işte böyle bir tablettir. Bu tablette ikinci derece bir polinom denklemi, çarpımları ve farkları bilinen iki sayının bulunması problemi olarak yorumlanır.

Jöran Friberg

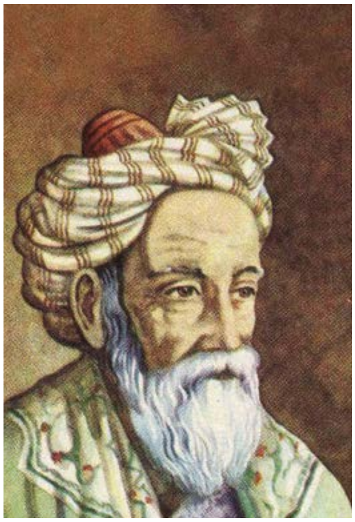
http://www.storyofmathematics.com/sumerian.html

Friberg'in bahsettiği Sümer mahkeme tabletinin ön ve arka yüzleri, MÖ 2100.

Paylaşılmak istenen tarlanın şekli açıkça görülüyor.



Harezmi



Ömer Hayyam

Şerafettin Tusi

Harezmi'nin Cebir kitabından bir sayfa

Daha sonra bu denklem bir alan problemi olarak çizilir ve aranan sayılar alanı bilinen bir tarlanın kenarları olarak algılanır. Çeşitli alan kaydırmalarla bu kenarların sayısal değerleri bulunur.

İkinci derece polinomları çözme tekniklerinin bu şekilde "ayağa düşmesinin" nedeni ise matematikçilerin çözümünü tam olarak kavradıkları bu probleme artık ilgi duymamaya başlamasıdır. Bu davranış, matematikçilerin binlerce yıldır tedavi edemedikleri bir meslek hastalığıdır.

Artık matematikçiler üçüncü derece polinomlara ilgi duymaya başlamıştı, çünkü bazı özel durumlar dışında, üçüncü derece polinomlar dünyasında ne döndüğünü hiç anlamıyorlardı. Bu yüzden ilk olarak üzerine gidilen soru, üçüncü derece bir polinomunun bir kökü olup olmadığının hangi yöntemle anlaşılacağı sorusuydu.

Burada hatırlatmak gerekir ki çözüm olarak sadece sıfırdan büyük sayılar düşünülüyordu, çünkü sıfırdan küçük sayıları henüz matematikçiler bile tam olarak anlamamıştı. Yöntem deyince de aklınıza semboller ve formüller gelmesin. Henüz bunların icadına bin küsur yıl var. Matematik tabletlerinin metinleri aşk mektupları taşıyan tabletlerdeki metinlerden farklı değildi o zamanlar. O dönemler sözelcilerin altın çağıydı adeta.

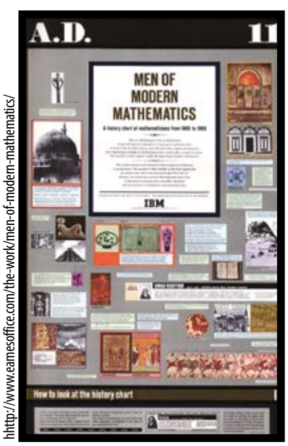
Alet işler el övünür derler ya, alet olmayınca da elden bir şey gelmiyor. Matematikçilerin polinomlar konusunda bir ilerleme kaydetmek ve övünmek için Harezmi'yi beklemeleri gerekti. Öklit'in *Elemanlar* adlı kitabıyla eşdeğerde tutulan *Cebir ve Denklem Hesabı* adlı kitabıyla Harezmi matematik dünyasına cebirsel yöntemleri getirdi. Tanrılardan ateşi çalıp insanlığa getiren Prometheus gibi.

Harezmi'nin yöntemlerini kullanarak üçüncü derece polinom denklemlerinin ne zaman kökleri olacağı sorusuna dişe dokunur ilk cevapları verenler arasında Ömer Hayyam vardır. Matematik tarihini yazarken, İslam matematiği dahil, Doğu'dan hiç söz etmeme becerileriyle bilinen Batılı bilim tarihçileri bile Ömer Hayyam'ın katkılarını görmezden gelmez. Bunun en güzel örneği de 1966 yılında IBM için hazırlanan Modern Matematikçiler başlıklı bir eğitim afişinde Ömer Hayyam'a açıkça yer verilmesidir.

Bu problemle uğraşan bir diğer İslam matematikçisi de Şerafettin Tusi'dir. Hatta çalışmalarının bir yerinde üçüncü derece bir polinomun maksimum değerini bulmak için türev yöntemleri kullanmış ve bu işi Newton'dan beş yüz yıl önce yaparak Batılı bilim tarihçilerini çıldırtmıştır. Şerafettin Tusi'in el yazması kitabı 1980'lerde bulunmuştur. Buradaki bilgilerden Tusi'nin formel olarak bile olsa polinomun türevinin köklerine baktığının anlaşılması üzerine Batılı birkaç yazar, Newton'u kurtaramayacaklarını görünce, Arşimet'e sığınmış ve Arşimet'i okuyan herkesin zaten bunları yapabileceğini yazmıştır. Arşimet'in kendi yazdıklarını niye okumadığı gibi bir soruya ise hiç girmemişlerdir.

On altıncı yüzyıla gelindiğinde üçüncü derece polinom denklemleri çözme becerisi üniversitede iş bulabilmek ve hatta bulduğunuz işi kaybetmemek için gerekli bir beceri olmuştu. Bir üniversiteden iş isteyen kişinin karşısına üniversite yönetimi bir profesör çıkarıyordu. Bunlar karşılıklı birbirlerine denklemler soruyordu. Bu yarışmayı profesör kazanırsa işine devam ediyor, yabancı da başka bir şehire iş aramaya gidiyordu. Yabancı kazanırsa profesörü kovup yerine daha başarılı olduğunu kanıtlamış olan yabancı alınıyordu.

http://www.eamesoffice.com/the-work/men-of-modern-mathematics/



IBM'in 1966 yılında bastırdığı yaklaşık 3,5 metre uzunluğundaki Modern Matematikçiler afişinde Ömer Hayyam maddesi en başlarda görülüyor.

Gerolamo Cardano

Niccolo Fontana Tartaglia

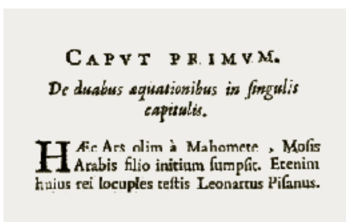
Lodovico Ferrari'

Akademik hayat o zamandan beri bu "içi beni yakar, dışı seni" durumunu -değişik adlar altında- sürdürmeyi becermiştir.

Rönesans döneminin polinomlarla uğraşan önemli isimlerinden biri de İtalyan Niccolo Fontana Tartaglia'dır. Yine böyle bir yarışma için Bologna'ya gittiğinde kendisine hiç şansı olmadığı söylenir. Çünkü ertesi gün karşısına çıkacak olan genç matematikçi Hannival Nave'ye, hocası ve kayınpederi Scipione del Ferro'dan bir defter miras kalmıştır. Bu deftere Ferro, hayatı boyunca karşısına çıkan rakipleri yenmesini sağlayan gizli bir formül yazmıştır. Bu formül herhangi bir üçüncü derece polinomun köklerini veren bir formüldür. Kızıyla evlendirdiği en iyi öğrencisine de kızına iyi bakması, onu aç bırakmaması için bu defteri bırakmıştır. Matematik zekâsının, bugün olduğu gibi o zaman da, babadan damada geçtiği oluyormuş demek ki.

Dolayısıyla bu yarışmayı damat beyin kesin olarak kazanacağı Bologna'da günün dedikodusudur. Tartaglia o gece "madem başkası bunun formülünü bulmuş, ben de bulabilirim" deyip sabaha kadar çalışmış ve o formülleri kendi de bulmuştur. Ertesi günkü yarışmayı, biraz da deplasmanda oynamanın dezavantajıyla kaybetse de bu buluşuyla adını matematik tarihine yazdırmıştır.

Cardano'nun *Ars Magna* (*Büyük Sanat*) adlı kitabının kapağı



CAPVT PRIMVM.

De duabus æquationibus in singulis capitulis.

HÆc Ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim huius rei locuples testis Leonardus Pisanus.

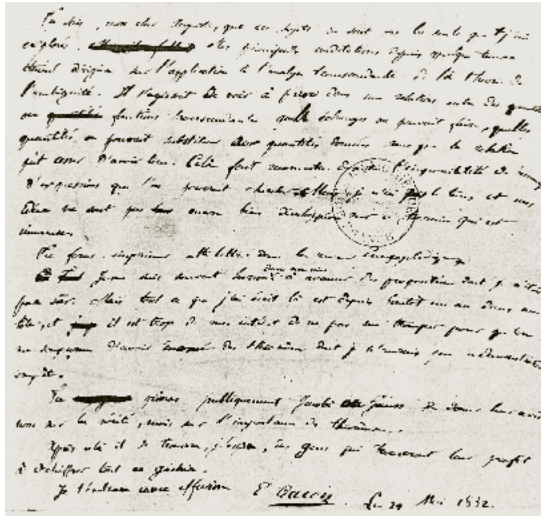
Ars Magna kitabının ilk konusuna girerken Cardano'nun Harezmi'ye referans verdiği giriş cümlesi: "Bu sanat Arap Musa'nın oğlu Muhammed [Harezmi] ile başladı. Bu ifademin güvenilir bir şahidi Pisa'lı Leonardo'dur [Fibonacci]." (solda)

Yüzlerce yıl çözülemeyen bir problemin çözüldüğü duyulunca, o çözüme dahi bakmadan, bir düzine yeni çözümün ortaya çıkması bugün de çok rastlanan bir olgudur. Problemin bir kez karizması çizilince ona vuran çok oluyor.

Fakat bugün üçüncü derece denklemlerin çözümlerini veren formüller ne o Bolognalı kayınpederin ne de Tartaglia'nın adıyla anılır. Bu formüller bugün Cardano formülleri diye bilinir.

Tartaglia'nın bu formülleri bulduğunu öğrenen ve kendisi de bu formüllerin peşinde olan Gerolamo Cardano, ne yapar ne eder Tartaglia'dan bu formülleri öğrenir. Ama Tartaglia'nın bir şartı vardır. Kendisi bu formülleri yayımlamadan Cardano da yayımlamayacaktır. Ne var ki Cardano bu formüllerin zaten daha önceden Bolognalı kayınpeder Ferro tarafından bulunduğunu öğrenince verdiği sözün bir yaptırımı kalmadığına hükmeder ve 1545 yılında, matematik tarihinin en önemli kitapları arasında yerini alacak olan, *Büyük Sanat* adlı kitabını yayımlar. Bu kitabın girişinde Harizmi'ye geliştirdiği teknikler için teşekkür eder. Kitapta anlatacağı teknikleri ve açıklayacağı formülleri Tartaglia'dan ve Ferro'nun defterinden öğrendiğini açıkça yazar ve Tartaglia'ya teşekkür eder. Yine de bütün bunlar Tartaglia'nın küplere binmesine ve bizim de bu formüllere Cardano formülleri dememize engel olamamıştır.

Hikâyemizin son kahramanı Galois'nın bir portresi



Je t'embrasse avec effusion E Galois. Le 29 Mai 1832.

Galois'nın son gece yazdığı ve fikirleriyle matematikte devrim etkisi yapan mektubu. İmzasının yanındaki tarih "29 Mayıs 1832" olarak okunuyor.

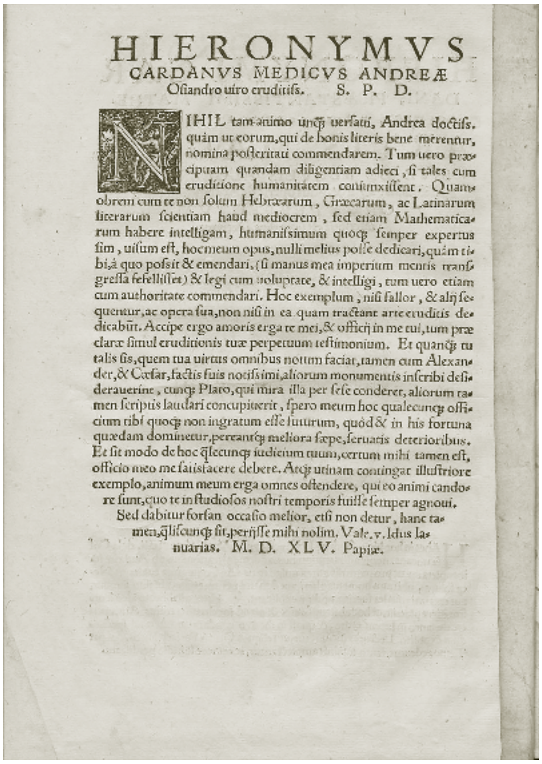
Şimdi sıra dördüncü derece polinom köklerini bulmaktadır. Cardano dördüncü derece polinomların köklerini dördüncü boyut olarak algıladığı ve dördüncü boyutun olmadığına inandığı için bu anlamsız çözümlerle uğraşmayı yardımcısı Lodovico Ferrari'ye bırakır. Ferrari dördüncü derece denklemlerin nasıl çözüleceğini çok kısa zamanda bulur. Öyle ki bu çözüm yöntemleri *Büyük Sanat* kitabının baskısına yetişir. Bu kitap basıldığında Cardano 44, Ferrari 23 yaşındaydı ve yaptıkları işlerle 470 yıl sonra *Bilim ve Teknik* dergisine konu olacaklarını henüz bilmiyorlardı.

Okuyucu burada matematiğin ne kadar verimli bir meslek olduğunu düşünmeye başlamıştır artık. Öyle ya, sırada beşinci derece polinomlar var. Onları çöz, meşhur ol. Sonra altıncı derece denklemler. Her sayı için başka bir matematikçinin adı tarihe yazılacak. Sayılar sonsuz olduğuna göre...

Ama kazın ayağı öyle değildi. Polinom denklemleriyle uğraşan matematikçiler *Büyük Sanat*'tan kısa süre sonra her denklemin makul yöntemlerle çözümünün bulunamayacağından şüphelenmeye başladı.

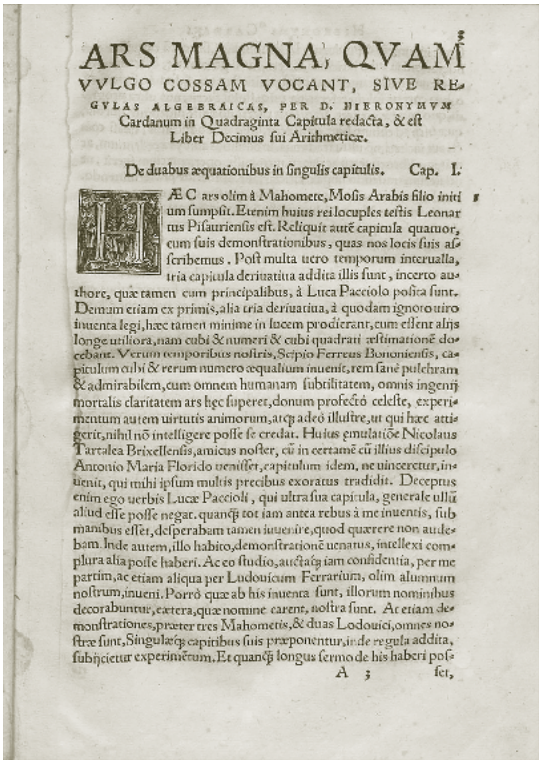
Bir polinomun köklerini bulmak için cebirsel yöntem kullanmak demek, polinomun katsayılarını kullanarak ve yalnızca cebirsel işlemler yaparak sonlu adımda köklere ulaşmak demektir. Burada cebirsel işlem dediğimiz işlemler bildiğimiz dört işlemin yani toplama, çıkarma, çarpma ve bölmenin yanı sıra kök ve kuvvet alma işlemleridir. Bir de sonuca sadece sonlu sayıda işlem yaparak ulaşılması istenir. Analitik yöntemlerde köke sonsuz işlem yaparak nasıl varılacağı anlatılır ve ne kadar işlem sonra köke ne kadar yaklaşılacağı hesaplanabilir. Uygulamada analitik yöntemler kullanılır. Cebirsel yöntemde ısrar etmek entelektüel bir oyundur fakat tarih boyunca süren bu ısrar matematikte, denklem kökleri dışında, pek çok olguya da açıklık getiren Galois kuramının doğmasına neden olmuştur. Bu da bir kez daha göstermiştir ki bazen doğru soru, doğru cevaptan çok daha yararlıdır.

<<<



HIERONYMVS CARDANVS MEDICVS ANDREÆ Osiandro uiro eruditiss. S. P. D.

NIHIL tam animo unquam uersatum, Andrea doctiss. quàm ut eorum, qui de bonis literis bene merentur, nomina posteritati commendarem. Tum uero præcipuam quandam diligentiam adieci, si tales cum eruditione humanitatem coniunxissent. Quamobrem cum te non solum Hebræarum, Græcarum, ac Latinarum literarum scientiam haud mediocrem, sed etiam Mathematicarum habere intelligam, humanissimum quoque semper expertus sim, uisum est, hoc meum opus, nulli melius posse dedicari, quàm tibi, á quo possit & emendari, (si manus mea imperium mentis transgressa fefellisset) & legi cum uoluptate, & intelligi, tum uero etiam cum authoritate commendari. Hoc exemplum, nisi fallor, & alij sequentur, ac opera sua, non nisi in ea quam tractant arte eruditis dedicabũt. Accipe ergo amoris erga te mei, & officij in me tui, tum præclaræ simul eruditionis tuæ perpetuum testimonium. Et quanquam tu talis sis, quem tua uirtus omnibus notum faciat, tamen cum Alexander, & Cæsar, factis suis notissimi, aliorum monumentis inscribi desiderauerint, cumque Plato, qui mira illa per sese conderet, aliorum tamen scriptis laudari concupiuerit, spero meum hoc qualecunque officium tibi quoque non ingratum esse futurum, quòd & in his fortuna quædam dominetur, pereantque meliora sæpe, seruatis deterioribus. Et sit modo de hoc qualecunque iudicium tuum, certum mihi tamen est, officio meo me satisfacere debere. Atque utinam contingat illustriore exemplo, animum meum erga omnes ostendere, qui eo animi candore sunt, quo te in studiosos nostri temporis fuisse semper agnoui. Sed dabitur forsan occasio melior, etsi non detur, hanc tamen, qualiscunque sit, perijsse mihi nolim. Vale. v. Idus Ianuarias. M. D. XLV. Papiæ.



ARS MAGNA, QVAM VVLGO COSSAM VOCANT, SIVE REGVLAS ALGEBRAICAS, PER D. HIERONYMVM Cardanum in Quadraginta Capitula redacta, & est Liber Decimus sui Arithmeticæ.

De duabus æquationibus in singulis capitulis. Cap. I.

HÆC ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim huius rei locuples testis Leonartus Pisauriensis est. Reliquit autẽ capitula quatuor, cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis asscribemus. Post multa uero temporum interualla, tria capitula deriuatiua addita illis sunt, incerto authore, quæ tamen cum principalibus, à Luca Paciolo posita sunt. Demum etiam ex primis, alia tria deriuatiua, à quodam ignoto uiro inuenta legi, hæc tamen minime in lucem prodierant, cum essent alijs longe utiliora, nam cubi & numeri & cubi quadrati æstimationẽ docebant. Verum temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi & rerum numero æqualium inuenit, rem sanè pulchram & admirabilem, cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenij mortalis claritatem ars hęc superet, donum profectò celeste, experimentum autem uirtutis animorum, atque adeò illustre, ut qui hæc attigerit, nihil nõ intelligere posse se credat. Huius æmulatiõe Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cũ in certamẽ cũ illius discipulo Antonio Maria Florido uenisset, capitulum idem, ne uinceretur, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego uerbis Lucæ Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullũ aliud esse posse negat, quanquam tot iam antea rebus à me inuentis, sub manibus esset, desperabam tamen inuenire, quod quærere non audebam. Inde autem, illo habito, demonstrationẽ uenatus, intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaque iam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alumnum nostrum, inueni. Porrò quæ ab his inuenta sunt, illorum nominibus decorabuntur, cætera, quæ nomine carent, nostra sunt. At etiam demonstrationes, præter tres Mahometis, & duas Lodouici, omnes nostræ sunt, Singulæque capitibus suis præponentur, inde regula addita, subijcietur experimẽtum. Et quanquam longus sermo de his haberi posset,

A 3

Ars Magna'dan sayfalar

Beşinci derece polinom denklemlerinin cebirsel yöntemlerle çözümünün bulunamayacağını ilk iddia eden, *Büyük Sanat* kitabının basımından yaklaşık 300 yıl sonra, Paolo Ruffini olmuştur. Ancak kimseye derdini anlatamamış ve anlaşılmayan bir dâhi olarak mutsuz ölmüştür. Hemen ardından Niels Henrik Abel beşinci ve daha yüksek dereceden polinom denklemlerin cebirsel çözümlerinin olmayacağını kanıtlamış ve bu konuda bir makale de yayımlamayı becermiştir. Ama bu keşfinin tadını çıkaramadan yirmi yedi yaşında ölmüştür.

Konuya son darbeyi Evariste Galois adlı bir genç vurmuştur. Derecesi dörtten yüksek olan polinomların köklerinin cebirsel olarak bulunabilmesi durumunda sağlamak zorunda oldukları bazı şartlar bulmuş ve her denklemin bu şartlara uyamayacağını göstermiştir. Fakat tanrıların sırlarına bu kadar yaklaşmanın bedelini o da yirmi bir yaşında anlamsız bir düelloda ölerek ödemiştir. Son gecesinde yazdıkları ölümünden ancak on yıl kadar sonra anlaşılabilmiş ve zamanla üniversitelerin matematik bölümlerinde Galois Kuramı adlı bir ders açılmasına neden olmuştur.

Bugün akademi dünyasında makale üretme yarışı tüm çılgınlığıyla sürerken, fikirleriyle matematiğin akışını değiştiren Galois'nın toplu eserlerinin sadece 60 sayfa olduğunu da geçerken not edelim.

Buraya kadar anlatılanlar, kuramsal matematikçilerin entelektüel zevkleri sonucu yazılmış bir tarih hikâyesidir. Öte yandan teknik nedenlerle bir polinom denkleminin köklerini kullanacak olanlar uygulamalı matematikçilere müracaat ederek bu kökleri ihtiyaçlarını karşılamaya yetecek hassasiyette hesaplatmaktan geri kalmamıştır.

Bugün bu kökleri bilgisayar yazılımları aracılığıyla hesapladığımız için üniversitedeki işimizi bu yüzden kaybetme tehlikesi de kalmamıştır. Ama belki başkalarından daha çabuk ve daha hassas çözüm teknikleri geliştirirsek, adımızı tarihe yazdıramasak bile, terfi eder ve daha fazla para kazanabiliriz. İdealistlik de bir yere kadar!

Kaynaklar

- Yazıda adı geçen kişiler için bkz. Vikipedia
- Sümer mahkeme tableti için: Jören Friberg, "A Geometric Algorithm with Solutions to Quadratic Equations in a Sumerian Juridical Document from Ur III Umma",Cuneiform Digital Library Journal, 3, 2009.
- http://cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2009/cdlj2009_003.html