# Çok değişkenli rasyonel fonksiyonların sürekliliği

Ali Sinan Sertöz

Çok değişkenli rasyonel bir fonksiyonun tekillik noktası etrafındaki davranışı çok çeşitlilik gösterir. İncelenmesi en kolay olan durumda paydanın sadece orijinde sıfırı vardır. Değişken sayısı iki olduğu durumda bu rasyonel fonksiyon uzayda bir yüzey tanımlar ve bu yüzey orijinde $z$-eksenini ya bir tek noktada keser, ya da $z$-eksenine sarılır ki bu ikinci durumda fonksiyonun orijinde limiti yoktur deriz. Ne zaman ne olacağına karar vermek çoğu zaman sıradışı teknikler kullanmayı gerektirir. Bu nedenle ders kitaplarında bu konuyla ilgili fazla örnek bulunmaz. Örnek olarak, aşağıdaki limitlere bakalım.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3y^2z}{x^4+y^{12}+z^{14}} =? \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3y^2z^2}{x^4+y^{12}+z^{14}} =?$$

Bu rasyonel fonksiyonların paydaları yalnızca orijinde sıfırdır. Orijine yaklaşırken limitin ne olacağı kesinlikle değişkenlerin kuvvetlerinde kodlanmış olmalı. Demek ki yapılacak iş bu kodları çözmektir. Aşağıdaki teorem bu sorunun çözümünü vermektedir.

**Teorem:** *$N>1$ olmak üzere, $a_1,\ldots,a_N \geq 0$ negatif olmayan tamsayılar, $m_1,\ldots,m_N>0$ pozitif tam sayılar, ve $c_1,\ldots,c_N>0$ pozitif reel sayılar olsun. Bu durumda*

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_N)\to(0,\ldots,0)} \frac{x_1^{a_1}\cdots x_N^{a_N}}{c_1x_1^{2m_1}+\cdots+c_Nx_N^{2m_N}} \text{ limiti,}$$

$$\text{ancak ve ancak } \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{2m_i}>1 \text{ ise vardır.}$$

*Ve eğer bu limit varsa sıfırdır.*

**Not:** Teoremin kanıtına başlamadan önce birkaç noktayı açıklığa kavuşturalım..

• Hemen görülebileceği üzere $c_i$ değerlerini 1 kabul etmekte bir sakınca yoktur; $\beta_i > 0$ ve $\beta_i^{2m_i} = c_i$ olacak şekilde seçilmiş $\beta_i$ sayılarını kullanarak $X_i = \beta_i x_i$ koordinat dönüşümünü tanımlayabiliriz. Bu yeni koordinatlarda incelemek istediğimiz limit

$$(\beta_1^{a_1} \cdots \beta_N^{a_N}) \lim_{(X_1,\ldots,X_N)\to(0,\ldots,0)} \frac{X_1^{a_1} \cdots X_N^{a_N}}{X_1^{2m_1} + \cdots + X_N^{2m_N}}$$

şeklini alır. $(\beta_1^{a_1} \cdots \beta_N^{a_N}) \neq 0$ olduğundan, limitin var olup olmadığını anlamak yine aynı $a_1, \ldots, a_N, m_1, \ldots, m_N$ sayılarını incelemeyi gerektirir. Yani problem değişmez. Bu nedenle kanıt içinde tüm $c_i$ leri 1 kabul edeceğiz.

• Açıkca görüleceği gibi $a_i$ sayılarının tek görevi payın sıfıra gitme hızını belirlemektir. Bu durumda eğer tüm $x_i$ leri pozitif seçme şartını koyarsak $a_i$ leri pozitif tamsayı yerine pozitif reel sayılar olarak almak mümkündür. Eğer $a_i$ tamsayı değilse ve $x_i < 0$ ise $x_i^{a_i}$ değeri $\exp(a_i \ln x_i)$ şeklinde hesaplanır. Bunun için de negatif sayıların logaritmasının tanımlı olduğu kompleks sayılar teorisine geçmek gerekir ki burada bunu yapmayacağız. Bu yüzden biz $a_i > 0$ ve tamsayı olarak alacağız.

• $N = 1$ durumu hem çok kolay hem de biraz farklıdır. Bu durumda limitin var olması için gerek ve yeter şart, açıkça görüleceği üzere, $\dfrac{a_1}{2m_1} \geq 1$ şartıdır. Bu durumda eğer eşitlik varsa limit 1, mutlak eşitsizlik varsa limit 0 olur.

• Kanıt sürecinde notasyonda kolaylık olması bakımından aşağıdaki tanımları kullanacağız:

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$$

$$f(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^N x_i^{a_i}}{\sum_{i=1}^N x_i^{2m_i}}$$

$$p = \prod_{i=1}^N m_i,$$

$$p_i = p/m_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

**Kanıtın ana fikri:** Bu teorem için iki kanıt vereceğiz. Birinci kanıtta, limitini anlamak istediğimiz $f(\vec{x})$ fonksiyonunu $x_1$-eksenine paralel bir doğru üzerine kısıtlayıp, bu doğru üzerinde alacağı uç değerleri bulacağız. Bu doğruyu $x_1$-eksenine doğru indirdiğimizde bu uç değerlerin hangi şartlarda sıfıra gittiğini göreceğiz. Bu durumda limit de sıfır olacak.

Bir diğer kanıt da Murad Özaydın'ın önerisi üzerine Lagrange çarpanları tekniğini kullanacak. $x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}$ fonksiyonunu $x_1^{2m_1} + \cdots + x_N^{2m_N} = R > 0$ hiperyüzeyi üzerine kısıtlayıp yine uç değerlerini bulacağız. $R$ sıfıra giderken bu uç değerlerin hangi şartlarda sıfıra gittiğini araştıracağız.

**Teoremin Kanıtı:**
**İlk olarak limitin var olduğunu kabul edelim.** Bu durumda orijine giden her yol boyunca limitin var olacağı ve aynı değeri vereceği aşikardır. Her bir $\lambda_i > 0$ olacak şekilde bir $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ sabit vektörü seçelim. $f$ fonksiyonunu

$$\vec{x_\lambda}(t) = (\lambda_1 t^{p_1}, \ldots, \lambda_N t^{p_N}),$$

yoluna kısıtladığımızda

$$f(\vec{x_\lambda}(t)) = \left( \frac{\prod_{i=1}^N \lambda_i^{a_i}}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^{2m_i}} \right) t^{(a_1 p_1 + \cdots + a_N p_N) - 2p}$$

buluruz. Bu ifadenin $t \to 0$ durumunda bir limitinin olması ve bu limitin $\lambda$ dan bağımsız olması için $t$ nin kuvvetinin sıfırdan büyük olması gerekir. Bu da bize

$$a_1 p_1 + \cdots a_N p_N - 2p > 0$$

eşitsizliğini, ya da $p$ ve $p_i$ değerlerini yerine yazarsak

$$\frac{a_1}{2m_1} + \cdots + \frac{a_N}{2m_N} > 1, \qquad (*)$$

eşitsizliğini verir ki bu da aradımız gerek şarttır.

**Şimdi de (*) eşitsizliğini kabul edelim.** Kanıtın bu bölümünde $\lim_{\vec{x} \to 0} |f(\vec{x})| = 0$ olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $N$ üzerinden tüme varım yapacağız. $N = 1$ durumu için kanıtlanacak fazla bir şey olmadığı açıktır. Bu durumda $f(x_1) = x_1^{a_1 - 2m_1}$ olduğundan (*) eşitsizliği bize aranan limitin var olduğunu ve sıfır olduğunu hemen verir.

Şimdi $N > 1$ kabul edelim. Stratejimiz $|f(\vec{x})|$ fonksiyonunu $x_1$ koordinat eksenine paralel bir doğruya kısıtlayıp incelemektir. Fonksiyonun bu doğru boyunca maximum değerini hesaplayacağız ve bu doğru orijine doğru indikçe bu maksimum değerin sıfıra gittiğini göreceğiz.

İlk önce bazı aşikar indirgemeler yapacağız. Eğer herhangi bir $j$ için $\dfrac{a_j}{2m_j} \geq 1$ ise

$$|f(\vec{x})| = |x_1^{a_1} \cdots x_j^{a_j - 2m_j} \cdots x_N^{a_N}| \frac{x_j^{2m_j}}{\sum_{i=1}^N x_i^{2m_i}} \leq |x_1^{a_1} \cdots x_j^{a_j - 2m_j} \cdots x_N^{a_N}|$$

olacaktır. Öte yandan (*) eşitsizliğine göre ya $a_j - 2m_j > 0$ olacaktır ya da $j$ den farklı başka bir $i$ için $a_i > 0$ olacaktır. Her iki durumda da Sıkıştırma Teoreminden dolayı $\lim\limits_{\vec{x} \to 0} |f(\vec{x})| = 0$ elde edeceğiz.

Demek ki artık $0 \leq a_i < 2m_i$, $i = 1, \ldots, N$ durumunu incelememiz yeterli olacaktır. Bu durumda da yine (*) eşitsizliğinden en az bir $a_i$ nin pozitif olması gerektiğini görürüz. Biz notasyonda kolaylık açısından $0 < a_1 < 2m_1$ kabul edelim.

Şimdi artık **tümevarım hipotezimiz**i söyleyebiliriz:

$$\frac{d_2}{2m_2} + \cdots + \frac{d_N}{2m_N} > 1, \text{ise} \lim_{(x_2, \ldots, x_N) \to (0, \ldots, 0)} \frac{\prod_{i=2}^N |x_i|^{d_i}}{\sum_{i=2}^N x_i^{2m_i}} = 0 \text{ olur;}$$

Burada $d_2, \ldots, d_N$ negatif olmayan tamsayılar, ve $m_2, \ldots, m_N$ pozitif tamsayılardır.

Kanıtın bundan sonrası için herhangi bir $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ vektörü için $\pi(\vec{x}) = (|x_2|, \ldots, |x_N|)$ gösterimini kullanalım.

Bir sabit $\vec{x}$ seçelim ve $\pi(\vec{x}) \neq (0, \ldots, 0)$ durumunu ele alalım.

Şimdi $f(\vec{x})$ fonksiyonunu

$$t \mapsto (t, |x_2|, \ldots, |x_N|), \; t \in [0, \infty)$$

yoluna kısıtlayalım. $f$ nin bu kısıtlanmış halini $\phi_{\pi(\vec{x})}$ ile gösterelim;

$$\phi_{\pi(\vec{x})}(t) = f(t, |x_2|, \ldots, |x_N|) = \left( \prod_{i=2}^N |x_i|^{a_i} \right) \frac{t^{a_1}}{t^{2m_1} + \left( \sum_{i=2}^N x_i^{2m_i} \right)}, \; t \in [0, \infty).$$

Tanım kümesi üzerinde $\phi_{\pi(\vec{x})}(t) \geq 0$ olduğu aşikardır. Ayrıca $\phi_{\pi(\vec{x})}(0) = 0$ ve $\lim_{t\to\infty} \phi_{\pi(\vec{x})}(t) = 0$ olduğunu göz önüne alırsak $\phi_{\pi(\vec{x})}(t)$ foksiyonunun maksimum değerine $t_{\pi(\vec{x})} \in [0, \infty)$ gibi bir noktada erişeceğini anlarız. Bu durumda

$$0 \leq |f(\vec{x})| = \phi_{\pi(\vec{x})}(|x_1|) \leq \phi_{\pi(\vec{x})}(t_{\pi(\vec{x})}), \forall |x_1| \in [0, \infty)$$

olduğunu görürüz. Artık $\lim_{\pi(\vec{x})\to 0} \phi_{\pi(\vec{x})}(t_{\pi(\vec{x})}) = 0$ olduğunu göstermektan başka bir işimiz kalmadı.

Şimdi doğrudan bir türev hesabıyla $\phi_{\pi(\vec{x})}(t)$ fonksiyonunun maksimum değerinin

$$t_{\pi(\vec{x})} = \left(\frac{a_1}{2m_1 - a_1}\right)^{\frac{1}{2m_1}} \left(\sum_{i=2}^{N} x_i^{2m_i}\right)^{\frac{1}{2m_1}}$$

noktasında elde edildiğini ve o noktada $\phi_{\pi(\vec{x})}(t)$ fonksiyonunun değerinin

$$\phi_{\pi(\vec{x})}(t_{\pi(\vec{x})}) = K\, g(\pi(\vec{x}))^{(1-\frac{a_1}{2m_1})}$$

olduğunu buluruz; burada $K$ bir sabittir ve $g(\pi(\vec{x}))$ fonksiyonu $d_i = \dfrac{a_i}{1 - \frac{a_1}{2m_1}}$, $i = 2, \ldots, N$ olacak şekilde

$$g(\pi(\vec{x})) = \frac{\prod_{i=2}^{N} |x_i|^{d_i}}{\sum_{i=2}^{N} x_i^{2m_i}}$$

olurak ifade edilir. (Bunu tümevarım hipotezimizle kıyaslayın.)

Şimdi (*) eşitsizliğinden

$$\frac{d_2}{2m_2} + \cdots + \frac{d_N}{2m_N} = \left(\frac{1}{1 - \frac{a_1}{2m_1}}\right)\left(\frac{a_2}{2m_2} + \cdots + \frac{a_N}{2m_N}\right) > 1$$

buluruz ve bu da tümevarım hipotezimiz aracılığıyla

$$\lim_{\pi(\vec{x})\to 0} \phi_{\pi(\vec{x})}(t_{\pi(\vec{x})}) = 0$$

sonucunu doğurur. Bu da kanıtımızı tamamlar. $\square$

Bu teoremi kullanarak bu çeşit rasyonel fonksiyonların diferansiyellenebilir olup olmadıklarını da söyleyebiliriz.

**Eksonuç:** *$N > 1$ alalım. $a_1, \ldots, a_N, m_1, \ldots, m_N$ pozitif tamsayılar, ve $c_1, \ldots, c_N$ pozitif reel sayılar olsun. Eğer*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{2m_i} > 1 + \max_{1 \le j \le N} \{ \frac{1}{2m_j} \}$$

*ise,*

$$f(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i}}{\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^{2m_i}}$$

*fonksiyonu orijinde $C^1$ dir.*

**Kanıt:** $f$ fonksiyonunun $j$ inci kısmi türevini hesaplayarak

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \le \frac{|x_j|^{a_j - 1} \prod_{i=1, i \ne j}^{N} |x_i|^{a_i}}{\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^{2m_i}} (a_j + 2m_j)$$

olduğunu görürüz. Şimdi teoremi uygulayarak kısmi türevlerin orijindeki sürekliliğini gösterebiliriz. $\square$

**Not:** Teoremin kanıtı sırasında $(\lambda_1 t^{p_1}, \ldots, \lambda_N t^{p_N})$ yolunun çok özel olduğunu gözlemledik. Fonksiyonun limitinin olup olmaması fonksiyonun bu yola kısıtlanmış halinin limiti olup olmamasına bağlıydı. Acaba her limit problemi için buna benzer bir *kral yolu* var mıdır?

**Lagrange çarpanları yöntemiyle başka bir kanıt:** Bu teoremin aynı zamanda Lagrange Çarpanları yöntemiyle de kanıtlanabileceği fikrini Murad Özaydın'dan aldım. Bu fikri kullanarak aşağıdaki kanıtı sunuyorum..

Yukarıdaki kanıtta olduğu gibi genelliği kaybetmeden $0 \le a_i < 2m_i$, $i = 1, \ldots, N$ ve $a_1 > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca biliyoruz ki eğer $\vec{x}$ vektörü $x_1 = 0$ şartını sağlayan bir yol boyunca orijine inerse, o yol boyunca $f(\vec{x})$ in limiti sıfır olur. Bu nedenle eğer $\lim\limits_{\vec{x} \to (0, \ldots, 0)} f(\vec{x})$ var ise bu limit sıfır olmalı.

Şimdi iki fonksiyon tanımlayalım.

$$F(\vec{x}) = x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}, \text{ ve } G(\vec{x}) = x_1^{2m_1} + \cdots + x_N^{2m_N}.$$

$R > 0$ pozitif bir reel sayı olsun ve şu soruyu soralım: $F(\vec{x})$ fonksiyonunu $G(\vec{x}) = R$ hiperyüzeyi üzerine sınırladığımızda elde edeceği en küçük ve en büyük değerler nelerdir? Her $R > 0$ için hesaplayacağımız bu uç değerlerin $R$ sıfıra giderkenki limitinin, $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{2m_i} > 1$ şartı altında, sıfır olduğunu göstereceğiz ve bu da teoremin bir başka kanıtı olacak.

Bu probleme Lagrange Çarpanları yöntemini uygulayarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$a_i x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i - 1} \cdots x_N^{a_N} = 2\lambda m_i x_i^{2m_i - 1}, \;\; i = 1, \ldots, N.$$

Burada eğer bazı $i$ ler için $a_i < 1$ ise, biz de $x_i \neq 0$ almak zorunda kalırız ki bu bizi genellikten uzaklaştırmaz çünkü $a_i > 0$ ve $x_i = 0$ ise $F(\vec{x}) = 0$ olur. Bu da limitin sıfır olacağı beklentisiyle uyuşur. Netice olarak $a_i$ lerin büyüklüğüne bakmadan yukardaki eşitliklerin her iki taraflarını $x_i$ ile çarpalım.

$$a_i F(\vec{x}) = 2\lambda m_i x_i^{2m_i}, \;\; i = 1, \ldots, N$$

elde ederiz. Az önce gözlemlediğimiz gibi bazı $x_i$ lerin sıfır olması $F(\vec{x}) = 0$ vereceği için ve bu değerin de aradığımız en küçük ve en büyük değerlerden biri olmadığını gördüğümüze göre her $i$ için $x_i \neq 0$ kabul edebiliriz. O zaman bu yeni eşitliklerin her birini $2m_i x_i^{2m_i}$ ile bölüp $\lambda$ dan kurtularak

$$\frac{a_i}{2m_i} \frac{F(\vec{x})}{x_i^{2m_i}} = \frac{a_1}{2m_1} \frac{F(\vec{x})}{x_1^{2m_1}} \;\; i = 2, \ldots, N$$

yazabiliriz. $F(\vec{x})$ in sıfırdan farklı olduğu durumları incelediğimiz için her iki taraftan $F(\vec{x})$ leri götürerek

$$x_i^{2m_i} = \frac{a_i m_1}{a_1 m_i} x_1^{2m_1}, \;\; i = 2, \ldots, N \qquad (**)$$

elde ederiz. Bu denklemleri taraf tarafa toplayarak ve $G(\vec{x}) = R$ olduğunu hatırlayarak

$$x_1^{2m_1} \left( 1 + \frac{m_1}{a_1} \sum_{i=2}^{N} \frac{a_i}{m_i} \right) = R$$

elde ederiz. Parantez içindeki ifadenin sıfırdan farklı bir sabit olduğunu gözlemleyerek

$$\alpha = \left( 1 + \frac{m_1}{a_1} \sum_{i=2}^{N} \frac{a_i}{m_i} \right)^{-1}$$

diyelim. Bu durumda önce

$$x_1^{2m_1} = \alpha R,$$

ve sonra da (**) eşitliğini kullanarak

$$x_i^{2m_i} = \frac{a_i m_1}{a_1 m_i}\,\alpha R, \quad i = 2, \ldots, N$$

elde ederiz.

Lagrange Çarpanları yöntemine göre $F(\vec{x})$ fonksiyonunun $G(\vec{x}) = R$ hiperyüzeyi üzerindeki kritik noktalarını artık şöyle yazabiliriz:

$$x_1 = \pm\alpha^{\frac{1}{2m_1}} R^{\frac{1}{2m_1}} \text{ and } x_i = \pm\left(\frac{a_i m_1}{a_1 m_i}\,\alpha\right)^{\frac{1}{2m_i}} R^{\frac{1}{2m_i}}, \quad i = 2, \ldots, N.$$

Kısa bir incelemeyle bu kritik noktaların hepsinin $|F(\vec{x})|$ fonksiyonunun en büyük değerlerini verdiğini görebiliriz. Bu en büyük değerlerin hepsinin birbirine eşit olduğunu ve

$$|F(\vec{x})| = |x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}| = AR^{\frac{a_1}{2m_1} + \cdots + \frac{a_N}{2m_N}},$$

şeklinde yazılabildiğini de görebiliriz. Burada

$$A = A_1 \cdots A_N, \text{ ve } A_1 = |\alpha^{\frac{1}{2m_1}}|, \; A_i = |\left(\frac{a_i m_1}{a_1 m_i}\,\alpha\right)^{\frac{1}{2m_i}}|, \quad i = 2, \ldots, N$$

olarak alınmıştır.

Şimdi tekrar kendi $f(\vec{x})$ fonksiyonumuza dönersek, $|f(\vec{x})|$ fonksiyonunun $G(\vec{x}) = R$ hiperyüzeyi üzerinde alacağı en büyük değere de $M_R$ dersek,

$$M_R = \frac{|F(\vec{x})|}{G(\vec{x})} = AR^{\frac{a_1}{2m_1} + \cdots + \frac{a_N}{2m_N} - 1}$$

olduğunu görürüz.

Artık değişkenlerin kuvvetlerinin limit üzerindeki etkisini inceleyebiliriz. Eğer $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{2m_i} = 1$ ise, $M_R$ değeri, sıfırdan faklı olan $A$ sabitine eşit olacak ve $R$ sıfıra giderkenki limiti $A$ olacak. Oysa başka yollardan bu limitin sıfır olabildiğini görmüştük. İki farklı yoldan iki farklı limit bulduğumuza göre bu durumda limit yoktur.

Bu son durumu da inceledikten sonra artık $R$ sıfıra giderken limitin var olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{2m_i} > 1$ olduğunu ve o durumda da limitin sıfır olduğunu rahatca görürüz. $\square$

Bu da teoreme ilginç bir alternatif kanıt olarak akılda tutulabilir.

*Biraz da mizah için bu bağlantıya bakabilirsiniz.* $\ddot\smile$

*Ali Sinan Sertöz*
*Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06800 Ankara*
sertoz@bilkent.edu.tr