Ord.Prof.Dr. CAHİT ARF'ın
ELASTİSİTE TEORİSİNE KATKISI

Prof.Dr. Erdoğan Şuhubi
Temel Bilimler Fakültesi, İ.T.Ü.

Airy'nin 1863 yılında gerilme fonksiyonu kavramı yardımıyla düzlem elastisite (düzlem gerilme veya şekil değiştirme) problemlerinin çözümünü biharmonik denklemin çözümüne indirgenmesiyle bu tür sınır değer problemlerinin incelenmesine öncesine oranla çok daha sistematik bir yaklaşım getirilebilmiştir. Ancak bu yaklaşımın doğal uzantısı olması beklenen kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar teorisinin uygulanması başka bir sürekli ortamlar mekaniği dalı olan akışkanlar mekaniğinde potansiyel akımların irdelenmesindeki büyük başarısına karşın uzun yıllar elastisite teorisinde kendisini göstermemiştir. Analitik fonksiyonları düzlem elastisitede ilk uygulayan 1909'da Kolosov olmuştur. Fakat teorinin tam geliştirilmesi 1932'de Mushelishvili tarafından başarılmış ve teori ancak bundan sonra geniş bir problem sınıfının incelenmesinde standart teknik olarak yerini sağlamlaştırmış ve bugüne kadar da saklamıştır. Teorinin başarısı ve temelde en önemli katkısı gerilme alanını veren kompleks potansiyelleri sınır koşullarından doğrudan belirleme olanağı veren yöntemleri geliştirebilmesi olmuştur.

Bununla beraber önemli bir problem sınıfı olan serbest sınır problemleri elastisitede oldukça ihmal edilmiştir. Akışkanlar mekaniğinde bu tür problemler (jetler, kaviteler) büyük önem taşımakta, ancak elastisite teorisinde benzer problemlerin, bazı önemli mühendislik uygulamaları olmasına karşın, hemen hiç ele alınmadığı gözlenmektedir. Profesör Cahit Arf, 1947 ile 1954 yılları arasında yayınladığı altı makale ile elastisite teorisinde belirli bir serbest sınır problem sınıfına genel ve çok zarif bir çözüm getirmiş ve bir pür matematikçinin pratik tarafı oldukça ağır basan bir problemi ele aldığında ne kadar ilginç sonuçlara varabileceğinin belirgin bir örneğini ortaya koymuştur.

Profesör Cahit Arf'ın dört makalesinde incelediği genel problem düzlemde herhangi doğrultuda uzun kolların ucuna etkiyen düzgün yayılı normal gerilmelerle çekilen, sonlu sayıda tek kuvvetin etkisinde bulunan homojen ve izotrop bir elastik ortamda teğetsel gerilme sabit olacak şekilde serbest sınırı belirleme problemidir.

Bilindiği gibi düzlem elastisitede gerilme dağılımı, x, y kartezyen koordinatlarında

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} f(z)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau = 2\left[\psi(z) - \bar{z}f'(z)\right]$$

bağıntıları ile verilmektedir. Burada σ_x ve σ_y normal gerilmeler, τ ise kayma gerilmesidir. $\psi(z)$ ve $f(z)$, $z = x + iy$ değişkeninin analitik fonksiyonlarıdır. $\sigma_x + \sigma_y$ gerilme tansörünün invaryantı olduğu için α bir sabit olmak üzere $\sigma_x + \sigma_y = 4\alpha$ koşulu altında sınırda normal gerilme $\sigma_n = 0$ olduğundan teğetsel gerilme $\sigma_t = 4\alpha =$ sabit değerini alır. Dolayısıyla problemin çözümü

$$\operatorname{Re} f(z) = \alpha$$

kısıtlaması ve dış gerilme olmadığını ifade eden

$$2\mathrm{Re}\, f(z)dz - \left[\overline{\psi(z)} - \overline{zf'(z)}\right] d\bar{z} = 0$$

sınır koşulu altında gerilme potansiyellerini ve sınırın denklemini veren $z = z(t)$ fonksiyonunu (t bir reel paramètre) belirleme anlamına gelmektedir.

Buna göre ele alınan problemin matematik tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir:

Bütün z-düzleminde $\sigma_x + \sigma_y = 4\alpha$ *olmak üzere, bu düzlemde bir* C *bölgesini çevreleyen kapalı* L *serbest sınırını aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde belirlemek*

1. *C bölgesi sonsuz noktasını içermez. C bölgesinin bir z değişken noktası sürekli bir şekilde sonsuza gittiğinde* $\arg z$, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ *sayılarından birine gider.*

2. *Her* ϕ_j *sayısına*

$$(a_1^{(j)},\ b_1^{(j)}),\quad (a_2^{(j)},\ b_2^{(j)}),\ \ldots,\ (a_{\nu_j}^{(j)},\ b_{\nu_j}^{(j)})$$

ayrık aralıklar kümesi karşı gelir. Burada $a_k^{(j)}$ *ile* $b_k^{(j)}$

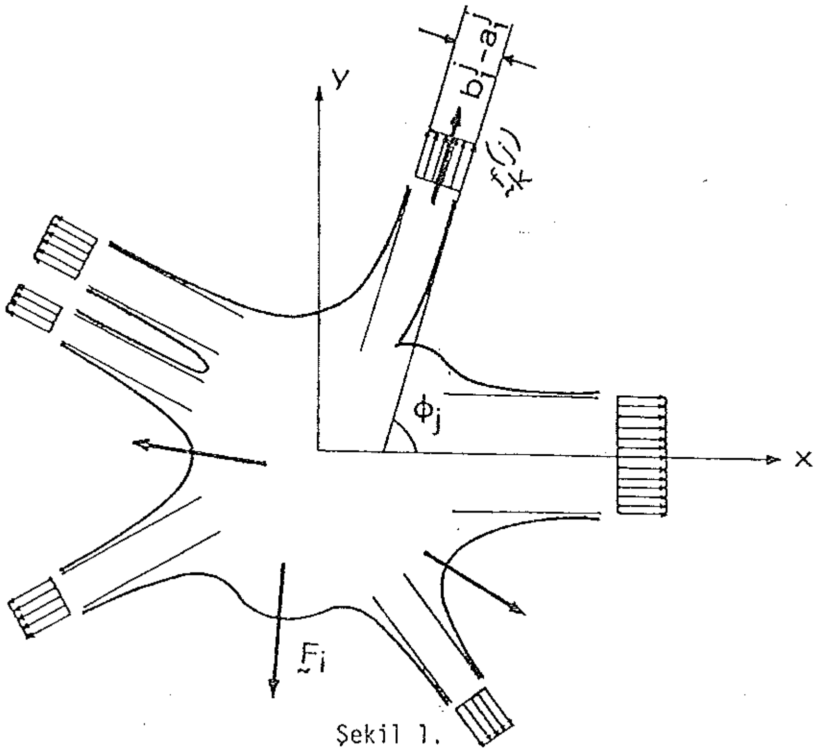
$$a_k^{(j)} \leqslant \lim_{z\to\infty} \mathrm{Im}\, e^{-i\phi_j} z \leqslant b_k^{(j)}, \quad k = 1,2,\ldots,\nu_j$$

olarak tanımlanmıştır. z *sayısı* $\lim\limits_{z\to\infty} \arg z = \phi_j$ *olacak şekilde sonsuza gitmektedir.*

3. *L sınırının ancak sonlu sayıda büküm ve dönüm noktaları vardır.*

4. *Gerilme tansörü, dolayısıyla* $\Gamma(z) = (\sigma_x - \sigma_y - zi\tau)/4\alpha$ *büyüklüğü, sonsuz noktası hariç olmak üzere* C *içinde ve sınırlı* L *üzerinde tanımlı olup* C *içinde ancak sonlu sayıda noktada sonsuz olabilir. Yani* $\Gamma(z)$ *meromorf bir fonksiyondur.*

Bölgenin durumu Şek.1'de gösterilmektedir. $f_k^{(j)}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu_j$ kollara etkiyen gerilmelerin bileşkesini, F_i ler ise tek sonlu sayıdaki kuvvetleri göstermektedir.



Şekil 1.

$Z = \Gamma(z)$ konform dönüşümü gözönüne alındığında serbest sınırda, ϕ sınır eğrisinin teğetinin x-ekseniyle yaptığı açı olmak üzere,
$Z = \exp(-2i\phi)$ olduğundan C bölgesinin L sınırı Z-düzleminde birim daire üzerinde yay parçalarına dönüşür. Ters dönüşüm $z = \Lambda(Z)$ ise sınırın

eğrilik yarıçapına karşı gelen $\chi = 2i\, Z^{3/2}\, \Lambda'(Z)$ büyüklüğü reel olacağından bu fonksiyon birim daire üzerinde serbest sınıra karşı gelen yay parçaları üzerinde reel değerler almalıdır. Dolayısıyla problemin çözümü verilen koşulları gerçekleyen $\Lambda(Z)$ dönüşüm fonksiyonunu belirlemeye indirgenmiş olmaktadır. Bu dönüşüm belirlendikten sonra

$$z = \Phi(\zeta) = i \int \chi\left(\frac{1}{i}\,\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2}\,, \quad Z = \zeta^2$$

fonksiyonu tanımlandığında serbest sınırın denklemi

$$z = \Phi\left(\frac{1-it}{1+it}\right)$$

olarak bulunmaktadır. Burada t, ζ-düzleminde reel eksenin, üzerinde $\chi(t)$ fonksiyonunun reel kaldığı, parçalarında dolaşmaktadır. Profesör Cahit Arf bu problemi ilk kez 1946 yılında VI. Uygulamalı Mekanik Kongresi'ne sunduğu bir bildiri de ortaya atmış, problemin kaynağını da ülkemizin başka bir büyük bilim adamı olan Profesör Mustafa İnan'ın Zürich'te ETH da doktora çalışması sırasında yaptığı bir deneysel araştırma oluşturmuştur. Kongre bildirilerinin yayınlanmaması dolayısıyla bu çalışmanın görünmesi oldukça gecikmiş ve kronolojik sırada ters bir yer alarak ancak [16]* sayılı yayınla erişilebilir bir nitelik kazanmıştır. [16] ve [5] sayılı yayınlarda problemin genel özellikleri üzerinde durulmuş, kompleks potansiyellerin genel yapıları incelenmiş, konform dönüşümü belirlemek için bir formalizm geliştirilmiş ve dönüşüm fonksiyonun özellikleri ile sınır eğrisinin şekli üzerinde ayrıntılı bir inceleme yapılmıştır. Yalnız sonsuz kollardan yükleme halinde çözüm eksplisit olarak verilmiş ve dört kol için çözüm tam olarak

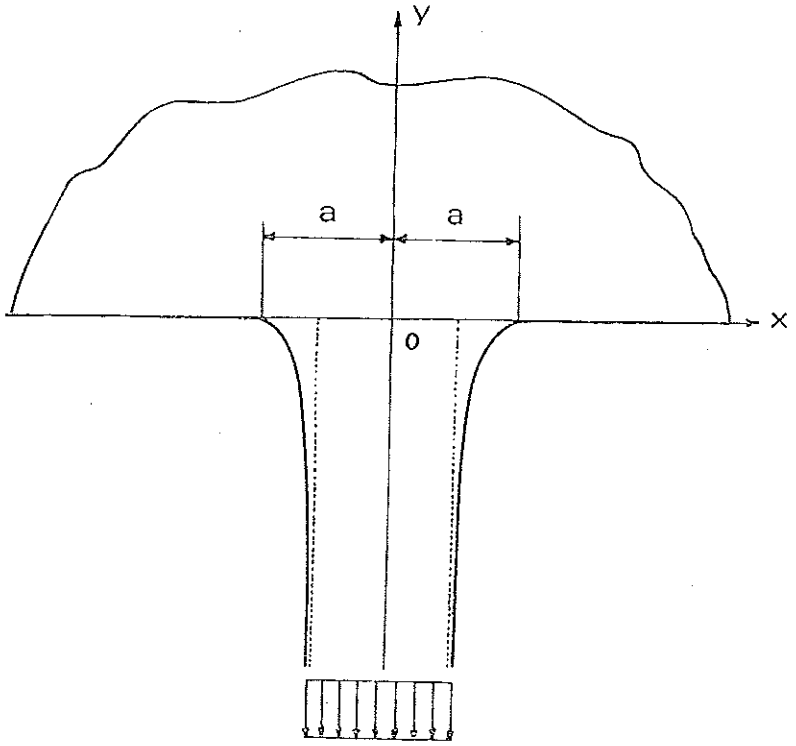
---

*Köşeli parantez içindeki sayılar Prof. Cahit Arf'ın yayın listesindeki sayıları göstermektedir.

elde edilerek serbest sınır bulunmuştur. Ortamın sonlu kalması halinde tek yükler altında da çözüm, gerilme tansörünün hiçbir yerde hidrostatik olmaması kısıtlaması ile eksplisit olarak verilmiş ve eşit şiddet ve zıt yönlü iki kuvvet için serbest sınır açık olarak bulunmuş, altı kuvvet hali de kısaca ele alınmıştır. [8] de yalnız kollarından yüklü $n+1$ kollu bir ortamda dönüşüm fonksiyonunu belirlemek için çözülmesi gereken bir transandant denklem takımının belli koşulları sağlayan bir çözümünün varlığı konstrüktif bir yöntemle kanıtlanmış ve böyle bir denklem takımının çözümünü istenen yaklaşıklıkla hesaplama olanağını sağlayan yakınsak bir yöntem geliştirilmiştir. [11] de ise problem C bölgesinin çok bağımlı olması halinde oldukça sofistike bir teknikle ele alınmış ve C bölgesinin konform dönüşmüşünden üretilen Riemann yüzeyinin genus'unun 1 olması hali için çözüm verilmiştir. Genus'un birden büyük olması halinde çözümün ilerideki bir makalede inceleneceği vaadedilmişse de herhalde ilgi alanının kayması bizi bu çözümden şimdilik mahrum bırakmıştır.

Diğer iki makaleden [3] te düzlem elastisite ile hidrodinamikteki serbest sınır problemleri arasındaki bir benzeşim üzerinde durulmuş ve bir yarım düzlem içindeki sıvının reel eksen üzerindeki bir sonlu delikten alt yarı düzleme akış probleminin bilinen çözümünden yararlanarak Şek.2'deki elastisite probleminin çözümü ve sonsuz kolun sınır eğrisi belirlenmiştir. Ancak $x > a$ için yarım düzlem sınırında gerçekçi olmayan bir normal gerilme dağılımı da çözümde ortaya çıkmıştır. [5] te de aynı problem ele alınmış, ancak konform dönüşümde uygun bir değişiklik yapılarak bu gerilme dağılımı giderilerek bu sınır da gerilmesiz hale getirilmiştir.

Profesör Cahit Arf'ın elastisitede serbest sınır problemleriyle ilgili çalışmaları bilgim içinde bu konudaki literatürde ilk ve tek örneği oluşturmakta ve geniş bir problem sınıfı için tüketici bir çözüm ortaya



Şekil 2

koymaktadır. Açtığı yeni ufuklar nedeniyle gerek matematikçilerin gerekse mühendislerin üzerine üşüşmesi beklenirken yurt dışında bu çalışmaların maalesef layık olduğu ilgiyi görmediği gözlenmektedir. Sanırım bunun nedeni yayınların hemen tümünün, yabancı dilde olmakla beraber, ulusal dergilerde yer alması, dolayısıyla geniş bir araştırıcı kütlesinin dikkatini çekmemesidir. Halbuki konu şimdi oldukça günceldir ve özellikle liflerle güçlendirilmiş kompozit malzemelerin boyutlandırılmasında, tasarruf edilecek her gramın yarar sağladığı uzay yapılarının tasarımında büyük önem taşımaktadır. Ancak belki de teorinin anizotrop elastik cisimlere genelleştirilmesi gerekmektedir. Bu da kanımca çok güç değildir. Belki de yakın bir gelecekte başka bir araştırıcının Profesör Cahit Arf'ın bulgularını bağımsız olarak yeniden keşfettiğine tanık olacağız.